



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.















SCIENCE DEPT.









.

.

2.5

2.5









Mathematis

b u c h

die

er Mathematik

ren Mathematikern

Mitwirkung der Herren

Albert Wangerin

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann.

Vierzehnter Band.

Jahrgang 1882.

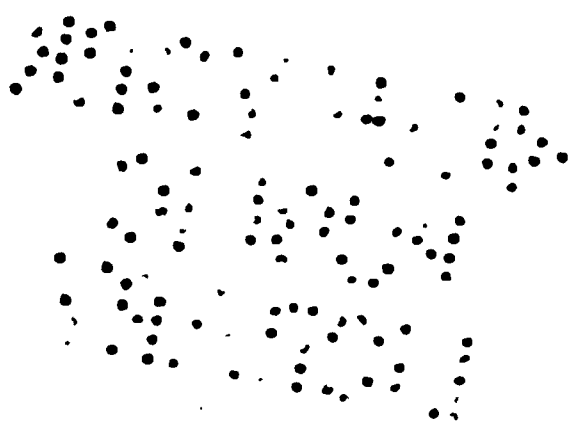
Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1885. 2



1522 -



## Erklärung der Citate.

---

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

*Abh. z. Gesch. d. Math.:* Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig. Teubner. IV.

*Act. Math.:* Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. I-III.

*Almeida J.:* Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

*Am. Ass.:* Proceedings of the American Association for the advancement of sciences.

*Am. J. Sc.:* American Journal of sciences and arts.

*Amst. Jaarb.:* Jaarboek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

*Amst. Verh.:* Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

*Amst. Versl. en Meded.:* Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. XVII.

*Anal.:* The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Iowa. gr. 8°. IX.

*Andresen Tekn. Foren. Tidsskr.:* Den tekniske Forenings Tidsskrift udgivet af A. Andresen. Kopenhagen.

*Ann. d. Chim. et Phys.:* Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Damas etc. Paris. Masson. 8°. XXXIII. XXXIV.

*Ann. de l'Éc. Norm.:* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par M. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°. (2) XI.

*Arch. f. Art.:* Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres.

*Astr. Nachr.:* Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°. 2446-2453.

*Astr. Viertschr.:* Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg i. E. Leipzig. W. Engelmann. 8°.













- Wash. Bull.:* Bulletin of the Philosophical Society of Washington.
- Wiedemann Ann.:* Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XV, XVI, XVII.
- Wien. Anz.:* Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien. 8°. 1882.
- Wien. Ber.:* Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien Zweite Abtheilung. Wien. 8°. LXXXV, LXXXVI, LXXXVII.
- Wien. Denkschr.:* Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien. 4°. XLV, XLVI.
- Wochenschr. f. Astr.:* Wochenschrift für Astronomie. Halle a. S. H. W. Schmidt.
- Wolf Z.:* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXIV, XXV, XXVI, XXVII.
- Woolwich, Art. Inst. Proc.:* Proceedings of the Royal Artillery Institution. Woolwich. 8°. XI, XII.
- Z. deutsch. Ing.:* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4°.
- Zeuthen T.:* Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (4) VI.
- Z. Realsch.:* Zeitschrift für das Realschulwesen. VII.

# Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

## Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

### Capitel 1. Geschichte.

#### A. Biographisch-Literarisches.

	Seite
Th. von Oppolzer. Ueber eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis . . . . .	1
A. Riecke. Pythagoras . . . . .	2
P. Tannery. Système astronomique d'Eudoxe . . . . .	2
P. Tannery. Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules . . . . .	3
H. G. Zeuthen. Fra Mathematikens Historie, II—III . . . . .	4
P. Tannery. Aristarque de Samos . . . . .	4
P. Tannery. Critique ancienne d'une démonstration d'Archimède . . . . .	6
P. Tannery. Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus . . . . .	7
B. Sepp. Zu Posidonius Rhodius . . . . .	7
Winterberg. Der Tractat Franco's von Lüttich: „De quadratura circuli“ . . . . .	8
E. Narducci. Due trattati inediti d'Abaco . . . . .	8
M. Steinschneider. Sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III. d'Aragon . . . . .	9
H. Suter. Unbekannte Schrift des Nic. Oresme . . . . .	9
J. P. Gram. Le triparty de Nicolas Chuquet . . . . .	9
O. Z. Bianco. G. F. Peverone . . . . .	10
J. Perott. Une arithmétique espagnole du 16 <sup>me</sup> siècle . . . . .	10
E. Wiedemann. Sulla storia delle scienze naturali presso gli Arabi . . . . .	11
A. Lindhagen. N. Copernici de hypothesibus motuum coelestium . . . . .	11
S. Günther. Peter und Philipp Apian . . . . .	12
A. Favaro. Vita ed opere di B. Sovero . . . . .	12
Ch. Henry. Anciens traités français d'algorisme et de géométrie . . . . .	14
Mouchez. Discours . . . . .	14
P. Fermat. Manuscripts inédits . . . . .	14
A. Favaro. Sul carteggio Galileiano . . . . .	15
A. Favaro. Episodio non ancora chiarito del processo di Galilei . . . . .	15
A. Favaro. Nuova edizione delle opere di Galilei . . . . .	15
G. Campori. Carteggio Gallileiano . . . . .	15





















































































	Seite
. Geelmuyden. Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale	933
erher. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage . . . . .	934
erzer. Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegun- gen in der Atmosphäre . . . . .	934
l. Meyer. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen .	934
erski. Ueber die Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs	935

## A n h a n g.

aller von Hallerstein. Lehrbuch der Elementar-Mathematik .	936
roz. Lehrbuch der Mathematik . . . . .	936
ä. Hochheim. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten . . . . .	937

937

938

938

938

938

938

938

939

939

Decimalen . . . . .	939
G. Böhm. Kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch . .	939
n. Wittstein. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln .	939
. C. Wittwer. Grundsätze der mathematischen Chemie . . . . .	939



# **Erster Abschnitt.**

## **Geschichte und Philosophie.**

### **Capitel 1.**

#### **G e s c h i c h t e.**

##### **A. Biographisch-Literarisches.**

**Th v. OPPOLZER.** Note über eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis. Wien. Ber. LXXXVI. 790-794.

Fragment 74 in Bergk's Ausgabe des Archilochos enthält die offenbar auf Autopsie beruhende Beschreibung einer Sonnenfinsternis. Gestützt auf seine bekannten Syzygientafeln untersuchte nun der Verfasser alle Phänomene dieser Art, welche in die ungefähre Lebenszeit des Dichters (700—640 v. Chr.) fallen, und fand, dass eine am 6. April 647 stattgehabte Finsternis in der That ganz gut den Angaben des Bruchstückes entspricht. Thasos, wo sich Archilochos in seinen letzten Lebensjahren aufhielt, gehörte der Zone an, innerhalb welcher die Verfinsterung total geschehen wurde. Allerdings aber begann dieselbe schon am Vormittag, während aus den Dichterworten geschlossen werden kann — nicht muss —, der Beginn sei auf eine Nachmittagstunde gefallen.

Gr.































A. FAVARO. Sul carteggio Galileiano, testè edito dal Marchese Giuseppe Campori. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 551-571.

Besprechung der im Titel angegebenen Publication und Angabe der Briefe, nach Jahren und Namen geordnet.

O.

A. FAVARO. Intorno ad un episodio non ancora chiarito del processo di Galilei. Ven. Ist., Atti (5) VII. 715-740.

Die Note bespricht den Umstand, dass die Unterschriften dreier Cardinäle, die doch in dem Galilei verurteilenden Tribunal sassen, unter dem Urteil selbst fehlen.

O.

A. FAVARO. Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galilei. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 83-132.

Die Notiz bespricht alles das, was bei einer neuen Gesamtausgabe der Werke Galilei's zu beachten wäre.

O.

G. CAMPORI. Carteggio Galileiano con note ed appendici. Modena. Società tipografica.

Kaum einer der hervorragenden Männer, durch welche unsere Methode der Naturforschung in die jetzt von ihr eingeschlagenen Pfade gelenkt wurde, hat so allgemein die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich gezogen, wie Galileo Galilei, dessen tragische Schicksale ihm stets noch ein besonderes Relief verliehen. So konnte man denn, zumal als Albèri's treffliche Gesamtausgabe erschienen war, die Erwartung hegen, dass für die Kenntniss der Lebensumstände und Leistungen des grossen Mannes alles Mögliche geschehen, alles vorhandene Material verwertet worden sei. Diese Erwartung trog jedoch; Professor





















n der Arbeit von Kramer (siehe p. 26) ausführlich ge-  
n ist. O.

---

GUINE. Liste des travaux sur les ovales de Des-  
es. Darb. Bull. (2) VI. 40-49.

r Titel bezeichnet den Inhalt. O.

---

SENBERGER. Die Geschichte der Physik in Grund-  
en mit synchronistischen Tabellen der Mathematik,  
Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften,  
ie der allgemeinen Geschichte. Erster Teil. Ge-  
chte der Physik im Altertum und im Mittelalter.  
ischweig. Vieweg u. Sohn.

r vorliegende erste Band des Werkes zerfällt in zwei  
Der erste ist der Geschichte der Physik im Altertum ge-  
und besteht aus drei Abschnitten. I. Von 600—300  
. Physik als reine Naturphilosophie. II. Von 300 vor  
nach Chr. Periode der mathematischen Physik. III. Von  
700. Periode des Untergangs der alten Physik. Der  
Teil behandelt wieder in drei Abschnitten das Mittelalter.  
150. Periode der arabischen Physik. II. 1150 bis 1500.  
he Periode der mittelalterlichen Physik. III. 1500 bis 1600.  
angsperiode der mittelalterlichen Physik. Jeder Abschnitt  
der Spitze eine allgemeine Charakteristik der Periode.  
folgt dann die Darstellung der Leistungen, geordnet nach  
innern. Am Schluss findet sich eine synchronistische  
der Physik, Mathematik, Chemie und beschreibenden Natur-  
chaften mit der allgemeinen Geschichte. O.

---

SSWITZ. Die Lehre von den Elementen während  
Ueberganges von der scholastischen Physik zur  
usculartheorie. Pr. Gotha.









Grundformen des  
 verschiedene Urteile  
 Logistik. Peirce  
 ähnlichen Logik  
 zu. Mi.

urions“.

ous“ genannten  
 ' relatives“ von  
 MI.

hip. Ed. Times

reren Berichten  
 der Anwendung  
 n. In der Tat  
 andtschaftlichen  
 vortrefflich ver-  
 Mi.

„Science de

..... von zeigen, wie man durch ein einfaches philo-  
 sophisches Raisonement zu der „Science de l'ordre“ gelangen  
 kann. Mi.

C. N. JUDSON. Zero and Infinity. Anal. IX. 9-11.

DE V. WOOD. Limits. Anal. IX. 79-81.

S. NEWCOMB. Remarks on the doctrine of limits.  
 Anal. IX. 114-119.

Controverse über die Definition der Grenze. Jn. (O.).

---







in diesem Mittel in Folge der von  
 Ruhe bleiben. Sind zwei Körper  
 , so werden sie sich gegenseitig Schutz gewähren. Jeder  
 Körper wird durch den andern gegen die von dieser Seite kom-  
 dieser gegenseitigen Deckung folgt,  
 1 Seiten  
 2 Minus  
 also gege  
 se, wel  
 ethere eine scheinbare Anziehung  
 rn. 10) Es lässt sich leicht nach-  
 proportional den Massen und um-  
 drate der Entfernung erfolgt.  
 ponderablen Körper eine Bewegung  
 mentanen Impulses begonnen, so  
 nd in gleichförmiger Art fortfahren,  
 pers in dem umgebenden Aether  
 stehenden Gleichgewichts hervor-

Teil III. 12) Die Annahme dieses Aethers giebt die Mög-  
 icheit, viele Erscheinungen der Dynamik und theoretischen  
 Physik zu erklären. 13) Diese Theorie stimmt überein mit der  
 Metaphysik, welche die Existenz eines höchsten Wesens beweist.  
 Mn. (O.).

E. RETHWISCH. Der Irrtum der Gravitationshypothese.  
 Freiburg i Br. Kiepert.

Rethwisch nimmt für alle grossen Bewegungen im Weltraume  
 und auf der Erde eine gemeinsame Quelle an. Eine Wirkung  
 in die Ferne ist physikalisch unmöglich. Eine allgemeine An-  
 ziehung der Körper findet nicht statt. Bewegung lässt sich nur  
 aus Bewegung ableiten. Die Axendrehung ist die Quelle aller  
 Entwicklung. Der Fall der Körper auf der Erde ist eine Folge  
 der Axendrehung, durch welche alle Teile der Erde nach innen  
 zerissen werden. Der Verfasser schliesst seine Schrift „in dem









der Kernpunkt des Aufsatzes anzusehen ist. Die Annahme starrer Körper schliesst offenbar die Entstehung innerer Kräfte (Spannungen) aus. Daher stehen alle Bewegungen starrer Körper, welche zur Herstellung des Gleichgewichts innere Kräfte erfordern, mit den Grundsätzen der Mechanik im Widerspruch, wie wir am Beispiel der Rotation gezeigt wird. Das gewöhnliche Verfahren, die inneren Kräfte nach Erfordernis hypothetisch einzuführen, ihre Entstehung als physikalische Frage beiseite zu lassen, bleibt unerwähnt. Der Verfasser geht so zu Werke, dass die Bewegung eines Körperelements in Translation und Rotation zerlegt und die kleinen Radialtranslationen erst vernachlässigt, nachdem das Princip der Flächen hergeleitet ist. Im letzten Theil des Aufsatzes scheint er die Idealisierung der Probleme vom Unterricht fern halten zu wollen und auf den Connex der Begriffe mit der Beobachtung Wert zu legen.

H.

# **Zweiter Abschnitt.**

## **A l g e b r a.**

### **Capitel 1.**

**Gleichungen.** (Allgemeine Theorie. Besonders algebraische und transcendente Gleichungen).

HJ. BERWALD. Ekvationslära i sammandrag jem  
exempelsamling. Stockholm.

Elementare Darstellung der Theorie der Gleichungen, i  
Benutzung allgemein bekannter Arbeiten von Bertrand, Th  
hunter u. A. E.

L. KRONECKER. Grundzüge einer arithmetischen Theo  
der algebraischen Grössen. Festschrift. Berlin. Rein  
Kronecker J. XCII. 1-123.

Ein durch die Grössen  $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots$  gebildeter „Rat  
nalitätsbereich“ ( $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \dots$ ) umfasst alle rationalen Fu  
tionen der  $\mathfrak{R}$  mit ganzzahligen Coefficienten; für algebrais  
Betrachtungen reicht es aus, die  $\mathfrak{R}$  als Variable anzunehm  
bis auf Ein Element, welches eine algebraische Function der ü  
gen wird. Sind alle  $\mathfrak{R}$  Variable, oder existirt nur ein  $\mathfrak{R}' =$   
dann ist der Bereich ein „natürlich abgegrenzter.“ Jede Wur  
einer irreductiblen Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades, deren Coefficien





n den  $u$  unabhängigen Teiler ab, dann bleibt eine „primitive Form“  $n^{\text{ten}}$  Grades  $Fm(x+u'x'+\dots)$  zurück, und es stellt, ohne irgend welche Symbolik, der „Divisor“ oder „Modul“

$$\frac{x+u'x'+\dots}{Fm(x+u'x'+\dots)} = \text{mod.}(x+u'x'+\dots)$$

n grössten gemeinsamen Teiler der Grössen  $x$  dar. Durch die Einführung der  $u$  werden alle Specialitäten abgestreift. Zwei Divisoren, welche dieselben Elemente  $x, x' \dots$  haben, sind einander „absolut äquivalent“, d. h. jeder teilt den andern. Der grösste Teiler der beiden Divisoren

$$\text{mod.}(x+u'x'+\dots), \quad \text{mod.}(y+v'y'+\dots)$$

$$\text{mod.}(x+u'x'+\dots+y+v'y'+\dots);$$

Product wird

$$\text{mod.}(xy+w'xy'+w''x'y+\dots)$$

das Product zweier Divisoren durch einen dritten teilbar, der mit dem ersten keinen gemeinsamen Teiler hat, so ist der zweite









Fundamentalform mit einer beliebigen Form entsteht wiederum eine Fundamentalform. Die Substitution, mittels deren das Produkt zweier primitiver Grundformen von beliebig vielen Gliedern in eine primitive Grundform von nur  $n$  Gliedern transformirt wird, bestimmt sich als diejenige, mittels welcher die aus den beiden algebraischen Formen componirte in irgend eine ihr relativ äquivalente lineare Grundform von nur  $n$  Gliedern übergeführt wird.

No.

F. J. STUDNIČKA. Bolzano's „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.“ Prag. 1817.

Cas. XI. 1-38. (Böhmisch).

Enthält eine böhmische Uebersetzung und Commentirung dieses von Bolzano in den Schriften der böhmischen Gesellschaft



ren, wenn

$$\varpi_h = \sum \omega^{hr} x_r \quad (\omega^n - 1 = 0)$$

als Produkt zweier ähnlicher Ausdrücke darstellen lässt. Die Anwendung der Decomposition auf die Gleichungen dritten Grades zeigt, dass die Wurzeln jeder cubischen Abel'schen Gleichung ganzzahligen Coefficienten sich als rationale Functionen der Wurzeln von Gleichungen

$$y^3 - 3py + p(r+s) = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0$$

stellen lassen. Dabei sind die  $p$  Primzahlen, und die  $r, s$  sind durch die Bedingungen definiert

$$p = r^2 - rs + s^2, \quad r \equiv s \pmod{3}.$$

Die Decomposition der cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereiches  $\sqrt{-31}$  mit den Wurzeln  $x_1, x_2, x_3$  fordert die Zerlegung in Ausdrücken

$$(x_0 + \omega^h x_1 + \omega^{2h} x_2)^3 = (g_0 + \omega^h g_1 + \omega^{2h} g_2)^2 (g_0 + \omega^{2h} g_1 + \omega^h g_2),$$

in denen  $\omega$  eine primitive dritte Einheitswurzel ist, und die  $g$  ganze algebraische Zahlen des Bereiches  $(\sqrt{-3}, \sqrt{-31})$  sind, in denen von derselben Form. In diesem Bereiche sind die Primzahlen  $p$  entweder als Normen ganzer algebraischer Zahlen darstellbar ( $p^0$ ), oder erst ihr Cubus hat diese Eigenschaft ( $p'$ ). Also diejenigen cubischen Gleichungen, für welche

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2) \cdot (x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2)$$

ein Potenz von  $p'$  ist, sind in solche zu zerlegen, bei denen

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3 = H(\xi, \omega)^2 H(\xi, \omega^2)$$

mit  $H$  eine ganze algebraische Zahl wird, deren Norm der Cubus von  $p'$  ist. Alsdann ergibt sich

$$x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \theta(\xi, \omega) \sqrt[3]{E(\xi, \omega)},$$

in dem auch  $\theta$  eine ganze algebraische Zahl und  $E$  eine primitive Einheit bedeutet. Fügt man zu  $E$  nur eine einfache Einheit hinzu  $\omega^h$ , so gehören alle jene Gleichungen zu derselben Gattung, also die Abel'sche Gleichung

$$x^3 - 10x + \sqrt{-31}(x^2 - 1) = 0,$$

deren Wurzeln die zu  $\sqrt{-31}$  gehörigen singulären Moduln der elliptischen Functionen sind. Die Gattung algebraischer Zahlen, welche durch die Wurzeln dieser Gleichung definiert wird, ist ge-



wahrscheinlich, dass (T) für jedes  $n$  erfüllbar ist,

Im letzten Paragraphen wird die Gleichung

$$(\sum_i x_i^t w_i)^n = p \sum_i c_i w_i$$

$$(r = 0, 1, \dots, p-2; \quad t = 0, 1, \dots, n-2)$$

behandelt, wo  $n$  irgend einen Teiler von  $p-1$  bedeutet. Die linke Seite wird in merkwürdiger Weise umgeformt und gedeutet, so dass z. B.  $c_i$  als  $(p-1)^{\text{ter}}$  Teil der Anzahl aller mod.  $(p-1)$  unter einander verschiedenen Wertsysteme  $r_1, r_2, \dots, r_n$  definiert wird, welche den beiden Congruenzen

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n \equiv t \pmod{n}, \quad g^1 + g^2 + \dots + g^n \equiv 0 \pmod{p}$$

gleich genügen. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich weitere interessante Sätze über die Zerlegungen von Primzahlen

$$4p = a^2 + 27b^2, \quad p = a^2 + b^2, \quad p = a^2 + 2b^2,$$

wenn  $p$  von der Form  $6n+1$ , resp.  $4n+1$  oder  $8n+1$  ist.

No.













**Gleichungen.**

Bestimmung der  
 1856 Berechnung  
 No.

vol. IX. 104-106.  
 einer Gleichung

1. Jan. (O.).

---

**K. V. ZENGER.** Auflösung numerischer Gleichungen mit  
 Hilfe von Logarithmen. Cas. XI. 288-291. (Böhmisch).

Enthält eine approximative Bestimmung der Wurzeln einer  
 numerischen Gleichung mit Hilfe von Logarithmen. Std.

---

**M. K.** Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und  
 vierten Grades. Cas. XI. 217-231. (Böhmisch).

Enthält eine Beleuchtung des bekannten Lagrange'schen  
 Princips, welches den betreffenden Lösungsmethoden gemein-  
 sam ist. Std.

---

**A. PÁNEK.** Bemerkung zur Auflösung der Gleichung  

$$x^{2n} + px^n = q$$
  
 und der Gleichung dritten Grades. Cas. XI. 231-233.  
 (Böhmisch).

Enthält die Auflösung der ersten Gleichung unter Verwen-  
 dung von

$$a = x^n + p,$$

während die zweite Notiz direct die Substitution

$$y = u^{\frac{1}{2}} + v^{\frac{1}{2}}$$

verwendet, um zur Cardanischen Formel zu gelangen. Std.

---

TH. SINRAM. Zur Gleichung dritten Grades. Hoppe Arch. LXVIII. 106-110.

Dass die Wurzeln der Gleichungen dritten Grades von der Wahl der Wurzeln der zur Lösung nötigen Hilfspgleichungen unabhängig sind, wird durch wirkliche Durchführung der umständlichen Rechnungen gezeigt. No.

W. LIGOWSKI. Bemerkungen zu der Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Hoppe Arch. LXVII. 446-447.

Auflösung der Gleichung

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

mit Hülfe der Zerlegung

$$(x^2 + \frac{a+l}{2}x + p)(x^2 + \frac{a-l}{2}x + q) = 0.$$

No.

R. HOPPE. Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine kubische. Hoppe Arch. LXIX. 111-112.

Reduction der Gleichung auf eine kubische und zwei reine quadratische Gleichungen. No.

PERRIN. Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs. S. M. F. Bull. X. 139-147.

Benutzt man Identitäten, wie z. B.

$$1) \quad (a+b+c)^4 - 2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^3 - 8abc(a+b+c) + [(a^2+b^2+c^2)^2 - 4(a^2b^2+\dots)] = 0,$$

$$2) \quad (ab+bc+ca)^4 - 2(a^2b^2+\dots)(ab+bc+ca)^3 - 8a^2b^2c^2(ab+\dots) + [(a^2b^2+\dots)^2 - 4a^2b^2c^2(a^2+\dots)] = 0,$$

$$3) \quad (a+b)^5 - 5ab(a+b)^4 + 5a^2b^2(a+b) - (a^5+b^5) = 0,$$

dann kann man durch 1), 2) die Wurzeln von biquadratischen Gleichungen auf die Form  $x = a+b+c$  bez.  $x = ab+bc+ca$ ,

**B. MINICH.** Sulle equazioni di quinto grado. Ven. Ist. Atti (6) VIII. 807-820, 828-908.

Der Herr Verfasser giebt eine Resolvente sechsten Grades,

---

**H. SINRAM.** Beitrag zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Hoppe Arch LXVIII 223-234, LXIX. 111.

Es wird  $a^n + b^n$  nach Potenzen von  $a+b$  und  $a.b$  entwickelt.  
No.

---

**LAGUERRE.** Sur quelques équations transcendentes.  
C. R. XCIV. 160-163.

**LAGUERRE.** Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. C. R. XCIV. 635-638.

**LAGUERRE.** Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. C. R. XCV. 828-831.

Es handelt sich um die Beantwortung der Frage: Welche elementaren Eigenschaften der algebraischen Gleichungen gelten auch für transcendente Gleichungen? Für die Untersuchung darüber ist die Einführung der Weierstrass'schen Primfunctionen von Wichtigkeit. Bezeichnet man durch  $\varphi(x)$  ein Polynom vom



























zweier cubischer Formen  $f, \varphi$ . So entspricht z. B. der Hesse'schen Form von  $f$  die Schnittlinie zweier „Ebenen der Curve“, die in der Ebene „ $f$ “ liegt; ferner der Functionaldeterminante von  $\varphi$  die vier Tangenten, welche die Schnittlinie der beiden Ebenen „ $f$ “, „ $\varphi$ “ treffen etc.

Von der Sturm'schen Arbeit (Borchardt J. LXXXVI. 116, siehe F. d. M. X. 1878. 96), die mit dieser die Grundlage und die meisten Resultate gemein hat, scheint der Herr Verfasser keine Kenntnis gehabt zu haben. My.

A. CAYLEY. Tables for the binary sextic. Sylv., Am. J. IV. 379-384.

Die Zahl der Covarianten einer binären Form sechsten Grades (diese mit eingeschlossen) beträgt bekanntlich 26. Zuerst werden die Leitglieder der ersten 18 dieser Covarianten angegeben. Dann wird gezeigt, wie sich die Leitglieder der folgenden 8 Covarianten (von den Graden 7 bis 15 in den Coefficienten der Grundform) aus den Coefficienten von einigen der früheren zusammensetzen. My.

F. DE BRUNO. Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques. Sylv., Am. J. V. 1-25.

Die von Herrn Klein auf functionentheoretischem Wege (bei dessen Verfolgung namentlich die hypergeometrischen Reihen einen wesentlichen Durchgangspunkt bilden) ermittelte Darstellung der Elemente der elliptischen Functionen mittels der absoluten Invariante der binären biquadratischen Form wird hier mit Ausschluss nicht-algebraischer Hilfsmittel auf rechnerischem Wege erzielt. Der Hauptsatz lautet:

Ist  $Y$  die gegebene binäre Form vierten Grades (in den Variabeln  $y$  geschrieben) mit positiver Discriminante  $\Delta$ ,  $i$  und  $j$  ihre Invarianten, ferner  $I = \frac{i^3}{j^2}$ ,  $H = \frac{\Delta}{i^3}$ ,

















Im Besonderen kommt also den sogenannten Correspondenzen ein endliches volles System zu. My.

---

C. LE PAIGE. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. R. XCIV. 31-32.

Zuerst wird die Bemerkung gemacht, dass, wie eine trilineare Form drei quadratische Covarianten mit der gleichen Discriminante besitzt, so eine quadrilineare Form vier biquadratische Covarianten mit den gleichen Invarianten. (Cf. unten).

Sodann wird eine Relation für trilineare Formen auf Formen mit drei ( $n$ ) Reihen von Variabeln ausgedehnt. Als specieller Fall ist darin eine bekannte Clebsch'sche Formel enthalten, die übrigens Herr Le Paige schon früher auf beliebig viele binäre Formen ausgedehnt hatte. (Cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 104.).

My.

---

C. LE PAIGE. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. R. XCIV. 69-71.

C. LE PAIGE. Sur les formes quadratiques à deux séries de variables. C. R. XCIV. 424-426.

C. LE PAIGE. Sur la forme quadrilinéaire. Torino, Atti. XVII. 299-320.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bildet die quadrilineare Form  $f = a_x a'_y a''_z a'''_u$ , die der Herr Verfasser in ähnlicher Weise dem Studium der Flächen vierter Ordnung zu Grunde zu legen gedenkt, wie er die Theorie der trilinearen Formen mit der der ebenen Curven dritter Ordnung verschmolzen hat.

Die Form  $f$  besitzt zunächst sechs Covarianten, die in Bezug auf immer zwei Reihen Variabeln quadratisch sind. Jede von diesen besitzt wieder zwei Discriminanten (je eine bezüglich einer Variabelnreihe). Diese zwölf biquadratischen Covarianten fallen aber zu je drei zusammen, so dass vier solche Covarianten restiren:

$$L_x^4, M_y^4, N_z^4, P_u^4.$$

















wo

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\sigma,$$

geliefert werden.

Die Zahl  $\theta$  ist hier deswegen vor den andern  $(\theta_i)$  ausgezeichnet, weil sie den Grad von  $\Phi$  in derjenigen Variablenreihe  $(x)$  angiebt, die in den ursprünglich (im Titel) der Anzahl nach gewünschten Covarianten gar nicht auftritt.

Das Resultat (3) wird dadurch abgeleitet, dass gezeigt wird, wie die linke Seite der Gleichung (2) die allgemeinste Covariante ihrer Art darstellt. Man hat daher nur diese linke Seite aus der nötigen Zahl von Covarianten gleicher Art linear zusammensetzen und dann die Coefficienten dieser Zusammensetzung einzeln zum Verschwinden zu bringen. Das Resultat (3) schliesst ohne Weiteres das andere mit ein, das für  $\rho = 1, \tau_1 = 0$  zu einer bekannten Formel für binäre Formen führt, nämlich: „Die Anzahl der der Differentialgleichung (2) genügenden linear unabhängigen Covarianten  $\Phi$  ist genau durch die Zahl

$$\varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \dots) - \varphi(\theta - \tau, \theta_1 + \tau_1, \theta_2 + \tau_2, \dots)$$

bestimmt.“

Wendet man jetzt den allgemeinen Satz succ. auf die einzelnen Gleichungen (1) an, so erkennt man bald, dass die durch zwei auf einander folgende Gleichungen (1) gelieferten Bedingungen nur teilweise von einander verschieden sind, indessen vermag Herr Capelli für die Anzahl der gemeinsamen Bedingungen nur eine untere Grenze anzugeben.

Dagegen wird ein Fortschritt in anderer Richtung erzielt. Die Gleichungen (1) sind nämlich den folgenden brauchbareren äquivalent:

$$D_{xx'} \Phi = 0, D_{x'x''} \Phi = 0 \dots D_{x^{(\sigma-1)}x^{(\sigma)}} \Phi = 0.$$

Hier vermag der Herr Verfasser genau anzugeben, wieviel (linear unabhängige) Bedingungen durch zwei dieser Gleichungen repräsentirt werden, vorausgesetzt, dass diese in der beschriebenen Reihe nicht unmittelbar auf einander folgen.

My.



weiter befinden sich Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Formen von J. J. WALKER, T. R. TERRY, CH. LADD, J. L. KITCHIN, J. O'REGAN, J. L. MCKENZIE, S. MARCKS, E. W. SYMONS, G. TURRIFF, A. COHEN, E. RUTTER, A. CAYLEY, W. J. C. SHARP, A. MCMURCHY, T. MUIR Ed. Times XXXVI. 30, 33, 76, 87-88, 105, 106-107; XXXVII. 30-31, 33-34, 46, 58-59, 74.

O.

LE PAIGE. Notiz über die  $2k$ -elementige centrale Gruppe einer Involution  $k^{\text{ter}}$  Stufe und  $(2k+1)^{\text{ten}}$  Grades. Wien. Ber. LXXXVI. 104-105.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5.

CAYLEY. On the 8-square imaginaries. J. Hopkins Circ. 1882. 203; Sylv., Am. J. IV. 292-297.

Das Problem, das Product von zwei Summen, deren jede aus den Quadraten von irgend acht gewöhnlichen algebraischen Grössen gebildet ist, wieder als Summe von acht Quadraten (nämlich ohne Hülfe von Radicalen) darzustellen, führt zu einem gewissen System von acht Einheiten (locativen Symbolen), grade wie die entsprechenden, auf zwei, resp. vier Quadrate sich beziehenden Probleme auf die Einheiten 1,  $i$ , resp. 1,  $i, j, k$  (d. s. die Quaternionen) führen.

In der That multiplicirt man die beiden Producte

$$(\alpha_0 \varepsilon_0 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots \alpha_7 \varepsilon_7) \text{ und } (\beta_0 \varepsilon_0 + \beta_1 \varepsilon_1 + \dots \beta_7 \varepsilon_7),$$

wo die  $\varepsilon$  imaginäre Einheiten ( $\varepsilon_0 = 1$ ), die  $\alpha$  und  $\beta$  irgend welche algebraische Grössen sind, so kann man ein solches Verknüpfungsgesetz, mittels dessen die Producte  $\varepsilon_i \varepsilon_k$  sich wieder



Analog seien  $u, v$  zwei Matrices dritter Ordnung; dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$vu = quv, u^3 = 1, v^3 = 1$$

(wo  $q$  eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet), die, dass die zu  $x + yv + zu$  gehörige Determinante den Wert  $x^3 + y^3 + z^3$  annimmt; man erhält dann ein System von Nonionen durch folgendes Schema von neun Matrices,

$$\begin{array}{c} 1 \\ u \quad v \\ u^2 \quad uv \quad v^2 \\ u^2v \quad uv^2 \\ u^2v^2. \end{array}$$

Multipliziert man diese neun Terme mit  $1, q, q^2$ , so erhält man eine geschlossene Gruppe von 27 Gliedern, analog der Gruppe

$$\pm 1, \pm u, \pm v, \pm uv.$$

My.

C. S. PEIRCE. On a class of multiple algebras. J. Hopkins  
Circ. II. 3.

No.

### Capitel 3.

## Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

CH. BIEHLER. Sur l'élimination. Nouv. Ann. (3) I. 529-542.

Aus den beiden Gleichungen  $f = 0, \varphi = 0$  vom  $m^{\text{ten}}$  und  $n^{\text{ten}}$  Grade wird, ähnlich wie bei Bézout, ein System von Gleichungen hergestellt, deren Determinante  $\Delta$  sein mag;  $\Delta_{\mu\nu}, \dots$  bezeichne die Subdeterminanten von  $\Delta$ . Es werden dann mit Hülfe dieser Bildungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gegeben, dass  $f, \varphi$  eine und nur eine, zwei und nur zwei u. s. w. Wurzeln gemeinsam haben; mit denselben Hilfs-





















ALVESTER. Sur les puissances et les racines de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 55-59.

Der „reciproken Determinante“ einer gegebenen an-  
 stehen wir diejenige, welche die reciproke Substitution  
 die zweite dargestellten Substitution repräsentirt. Addirt  
 den Diagonalhauptgliedern einer Determinante  $-\lambda$ , so  
 eine Function von  $\lambda$ , deren Wurzeln als „ $\lambda$ -Wurzeln der  
 ante“ bezeichnet werden sollen. Dann gelten folgende  
 die  $\lambda$ -Wurzeln der Reciproken sind die reciproken Werte  
 Wurzeln der Determinante; die  $k^{\text{ten}}$  Potenzen ( $k$  als com-  
 el angenommen) der  $\lambda$ -Wurzeln einer Determinante sind  
 mit den  $\lambda$ -Wurzeln der  $k^{\text{ten}}$  Potenz der Determinante.  
 ergibt sich eine Lösung des Problems: die  $k^{\text{te}}$  Potenz  
 ebenen Substitution zu finden. No.

ION. Introduction à la théorie des déterminants.  
 . Paris. Gauthier-Villars. 8°.

eser kleinen Schrift sind die allgemeinen Eigenschaften  
 rminanten, sowie ihre Anwendungen auf die Lösung  
 Gleichungen, auf die Elimination zwischen linearen  
 en oder zwischen zwei Gleichungen von höherem  
 ethode von Cauchy und Tschirnhausen) aus einander ge-  
 Determinanten mit zwei oder drei Reihen, ohne Be-  
 der Theorie der Inversionen. Im Anfang findet man  
 eine Definition einer Determinante durch Permutationen  
 bolische Producte etc. Mn. (O.).

ER. Die Anfangsgründe der Determinanten in  
 ie und Anwendung. Wiesbaden. Bergmann.

entare Einführung, für das erste Studium geeignet. In  
 itung heisst es: „Die Determinanten geben für den,  
 nur einigermaßen mit ihnen beschäftigt hat, ein klareres









„Circulanten“ sind Determinanten der Form

$$|a_{\lambda+\mu}| \quad (\lambda, \mu=0, 1 \dots n-1),$$

wenn jeder negative Index durch den kleinsten positiven ersetzt wird, dem er mod.  $n$  congruent ist. Es wird gezeigt, dass eine Circulante der Ordnung  $2m+1$  als Product aus  $(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})$  und einer Determinante  $m^{\text{ter}}$  Ordnung dargestellt werden kann, deren Elemente in den  $a$  cyklisch sind.

No.

J. TORELLI. Sui determinanti circolanti. Nap., Rend. XXI. 83-91.

Ueber Circular-Determinanten vgl. F. d. M. X, 113; XI, 119; XII, 111, 116; XIII, 127, 128; sie haben die im vorigen Referate angegebene Form. Es wird gezeigt, dass eine Circulardeterminante der Ordnung  $r \cdot m$  als Circulardeterminante der Ordnung  $m$  darstellbar ist, deren Elemente Summen von  $m^{r-1}$  Subdeterminanten der Ordnung  $r$  der gegebenen Determinante sind. Ein ähnlicher Satz gilt für schiefe Circulardeterminanten, d. h. für solche, bei denen die Elemente links von der Hauptdiagonalreihe das negative Zeichen haben. Multiplicirt man die Circulardeterminante der Ordnung  $n = m \cdot r$ , (wo  $m, r$  zu einander prim sind) mit  $\sum a_i$ , so ist das Product durch dasjenige zweier Circulardeterminanten der Ordnungen  $r, m$  teilbar. Aus diesen Sätzen ergeben sich die bisher bekannten als Specialfälle.

No.

J. J. SYLVESTER. On the properties of a split matrix. J. Hopkins Circ. 1882. 210-211.

Die Zeilen einer Determinante, z. B. der siebenten Ordnung, werden in zwei Teile geteilt, deren erster z. B.  $A, B, C$ , deren zweiter  $D, E, F, G$  umfasst. Unter dem Product  $BF$  zweier Zeilen wird die Summe der Producte entsprechender Elemente verstanden. Wenn die Producte jeder Zeile des ersten in jede Zeile des zweiten Teils gleich Null sind, so stehen die adjungirten



---

. PUCHTA. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. Wien. Gerold's Sohn.

---

. ŘEHOŘOVSKÝ. Ueber Borchardt's erzeugende Function. Cas. XI 111-121. (Böhmisch).

Führt man die symbolische Bezeichnung ein:

$$T = \Sigma \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2 - \alpha_2} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_n},$$

die  $t$  beliebige Grössen, die  $\alpha$  hingegen die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

bezeichnen, und bildet man die Determinanten

$$D = \Sigma \pm \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} \cdots \frac{1}{(t_n - \alpha_n)^2},$$

$$J = \Sigma \pm \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_n},$$



b. Multiplicität der Wurzeln  $s$  von  $D = 0$  und über ihre Beziehung zu der Zerlegung von  $f = s(x^2 + y^2 + \dots + s^2)$  in eine Summe von Quadraten. Wir erwähnen beiseite, den folgenden Satz: Bei der Zerlegung von  $f(x, y, \dots, s) = \sigma \cdot (x^2 + y^2 + \dots + s^2)$

Quadrat, gibt es so viele positive Vorzeichen, als  $D = 0$  Wurzeln hat, welche grösser sind als  $\sigma$ . Aus der Gleichung in  $s$  wird die lineare orthogonale Substitution abgeleitet, welche die quadratische Form in eine Quadratsumme umwandelt. No.

. LEROUX. Sur une application d'un déterminant.

Quart. J. XIX. 41-44.

Die Gleichungen dritten und vierten Grades werden dadurch gelöst, dass ihre Polynome mit den Circulanten

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ a_2 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$$

identifiziert werden.

No.

. MUIR. On a determinant formed by bordering the product of two determinants. Mess. (2) XI. 161-165.

Nimmt man zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

und bildet ihr Product

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3, & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3, & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3, & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3, & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet dies Product mit

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

so ist die betrachtete Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ a_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ b_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ c_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Glr. (O.).

TH. MUIR. On a symmetric determinant connected with Lagrange's interpolation problem. Lond., M. S. Proc. XIII 156-161.

Es sei

$$L_n = \left| \sin \frac{\lambda \cdot \mu}{n+1} \pi \right| \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n).$$

Dann ergibt sich z. B.

$$L_n = \left[ \frac{1}{2} (n+1) \right]^{\frac{n}{2}},$$

$$L_{2m} = (-1)^m 2^m \cdot \left| \sin \frac{\lambda \cdot (2\mu-1)}{2m+1} \pi \right| \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, m),$$

$$\left| \sin \frac{\lambda \cdot (2\mu-1)}{2m+1} \pi \right| = \left| \sin \frac{\lambda \cdot \mu}{2m+1} 2\pi \right|.$$

In ähnlicher Weise erhält man für

$$M_n = \left| \cos \frac{\lambda \cdot \mu}{n+1} \pi \right| \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n)$$

die Resultate

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (2n+1) \right]^{n-1},$$

$$\left| \cos \frac{\lambda \cdot \mu}{2m+1} \pi \right| = (-1)^m 2^m \left| \cos \frac{\lambda \cdot (2\mu-1)}{2m+1} \pi \right|$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \dots, m)$$

u. s. w.

No.

TH. MUIR. Note on the condensation of skew determinants, which are partially zero-axial. Lond., M. S. Proc. XIII. 161-164.



$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots \\ -a_1 & x_2 & b_3 & b_4 \dots \\ -a_2 & -b_3 & x_3 & c_4 \dots \\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & x_4 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Reihe nach  $x_1 = 0$ ; ferner  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ; u. s. w. setzt.  
No.

F. SCOTT. Notes on determinants. *Moss. (2)* XII. 105-118.

Der Verfasser betrachtet zuerst die Determinante  $n^{\text{ter}}$  Ordnung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & , & \alpha_1 + \beta_1 & , & \alpha_1 + \beta_2 \dots \\ \alpha_2 + \beta_1 & , & x_2 & , & \alpha_2 + \beta_2 \dots \\ \alpha_3 + \beta_1 & , & \alpha_3 + \beta_2 & , & x_3 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

deren Elemente gegeben sind durch die Gleichungen

$$a_{ii} = x_i, \quad a_{ik} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k;$$

und die Determinante 4<sup>ter</sup> Klasse, deren Elemente gegeben sind durch

$$a_{iii} = x_i, \quad a_{ijk} = \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_i,$$

u. s. w. Sie werden mit Hilfe alternirender Zahlen ausgewertet.

Im Weiteren beschäftigt sich der Verfasser mit geometrischen Fragen, welche ihn zur Betrachtung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & , & (\alpha_1 + \alpha_2)^2 & , & (\alpha_1 + \alpha_3)^2 & , & \dots & (\alpha_1 + \alpha_n)^2 & , & 1 \\ (\alpha_2 + \alpha_1)^2 & , & 0 & , & (\alpha_2 + \alpha_3)^2 & , & \dots & (\alpha_2 + \alpha_n)^2 & , & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n + \alpha_1)^2 & , & (\alpha_n + \alpha_2)^2 & , & (\alpha_n + \alpha_3)^2 & , & \dots & 0 & , & 1 \\ 1 & , & 1 & , & 1 & , & \dots & 1 & , & 0 \end{vmatrix}$$

ableiten, und welche nebst einigen anderen ähnlichen ausgewertet wird.  
Glr. (O.).

V. E. SERDOBINSKY. Zur Determinantentheorie. *Mosk. S.*  
X. Lief. 1. (Russisch).

Es wird hier ein Schachspielproblem ohne Anwendung der Determinanten-Theorie gelöst, das von Güntber in seinem „Lehr-

buch der Determinanten-Theorie“, 2. Aufl. S. 545, und auch von Glaisher (On the problem of the eight queens. Philosoph. Mag. 1874. December) betrachtet worden ist. Ty.

A. SACHSE. Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten.

Hoppe Arch. LXVIII. 427-432.

Aehnlich wie Herr E. Lucas (vgl. F. d. M. IX. 1877. 113) stellt Herr Sachse mit Hülfe einer „Differenzengleichung“ die Euler'schen und die Bernoulli'schen Zahlen als Determinanten dar, deren Elemente Facultäten der ganzen Zahlen sind. Durch Entwicklung nach Subdeterminanten ergeben sich Recursionsformeln. No.

N. JADANZA. Sopra un determinante gobbo che si presenta nello studio dei cannocchiali. Torino, Atti. XVII. 714-723.

Ableitung einiger Resultate aus der Theorie der Dioptrik mit Hülfe der bekannten hierbei auftretenden Kettenbruchdeterminante. No.

R. F. SCOTT. On some forms of cubic determinants.

Lond., M. S. Proc. XIII. 33-43.

Es werden cubische Determinanten nach besonders einfachen Bildungsgesetzen aufgestellt und berechnet. 1) Es sind  $n-m$  Lagen unter einander gleich, ebenso die  $m$  übrigen unter sich; 2) alle Elemente sind Null, ausgenommen diejenigen der drei Diagonalebene; 3) aus der ersten Lage werden die übrigen durch einfache lineare Combinationen mit constanten Grössen gebildet u. s. w. No.

systeme. Berl. Ber. 1882. 821-824.

Zwei Systeme von je  $n^2$  Grössen

$$a_{ik}, a'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

sind reciprok, wenn  $\sum_i a_{ki} a'_{ik}$  für  $k = k$  den Wert 1, sonst den Wert Null hat. Zwei Systeme entsprechender Subdeterminanten reciproken Systemen sind selbst einander reciprok, und das System der adjungirten Subdeterminanten, dividirt durch die Determinante, das reciproke eines Subdeterminantensystems so ist die Adjungirte einer jeden Subdeterminante, dividirt durch die Determinante, gleich der entsprechenden Subdeterminante des reciproken Systems. Ist das System  $(a_{ik})$  symmetrisch, so setzt man

$$U_{gh} = \sum_{i,k} a_{gi} u_{pi} u_{hk} \quad (g, h, i, k = 1, 2, \dots, n),$$

so ist jene Summe von Subdeterminanten-Producten

$$|a_{gi}| \cdot |u_{pi}| \cdot |u_{hk}|.$$

zwischen den verschiedenen Ausdrücken  $|u_{pi}| \cdot |u_{hk}|$ , bei denen

$$g = g_1, \dots, g_m; h = h_1, \dots, h_m; i, k = 1, 2, \dots, m$$

existiren genau dieselben linearen Relationen, wie zwischen  $|a_{gi}|$ , falls die  $a$  als unbestimmte Grössen betrachtet werden.

Die Subdeterminanten  $|U_{ik}|$  ( $i = i_1, \dots, i_m; k = k_1, \dots, k_m$ ) erbt sich die wesentliche Eigenschaft, dass sie als lineare Functionen der sämtlichen von einander linear-unabhängigen Subdeterminanten des Systems  $(a_{ik})$  darstellbar sind, so dass die Coefficienten von einander linear-unabhängige ganze Functionen der Unbestimmten  $u_{ik}$  sind.

Zwischen den Subdeterminanten allgemeiner symmetrischer Systeme bestehen folgende identische lineare Relationen

$$|a_{gh}| = \sum_r |a_{ik}| \quad (r = m+1, \dots, 2m),$$

$$(g = 1, \dots, m; h = m+1, \dots, 2m),$$

$$(i = 1, \dots, m-1, r; k = m+1, \dots, r-1, m, r+1, \dots, 2m).$$

No.



ucirt werden. Dann wird der Coefficient eines  $T$  in der Aufgabe  $T$ ,  $C$  durch die Lösung eines combinatorischen Problems gefunden; und hierbei zeigt es sich, dass die Resultate der vier Aufgaben, in welche  $C$  eingeht, durch eine einzige Quadrattafel dargestellt werden können. Die successiven Constructionen dieser Tafel für die verschiedenen Dimensionen sind einfacher Art; es werden zugleich mit ihnen auch Proben für die Richtigkeit der Resultate gegeben. Den Schluss bilden kurze Betrachtungen über die beiden noch fehlenden Aufgaben  $T$ ,  $K$  und  $K$ ,  $T$ .

No.

CROCCHI. Sopra la corrispondenza tra i coefficienti di un' equazione algebrica e le funzioni simmetriche complete. Batt. G. XX. 301-320.

Herr Crocchi untersucht die Aehnlichkeit, welche zwischen den Functionen  $V_p$  (Vgl. F. d. M. XI. 1879. 116; XII. 1880. 119) und den Coefficienten  $a_p$  einer Gleichung mit den Wurzeln  $x_1, x_2, \dots$  steht. Die Formeln für die Darstellung einer symmetrischen Function  $\varphi(x_1, x_2, \dots)$  durch die  $a_p$  wie durch die  $V_p$  entsprechen einander. Es ist

$$\frac{\partial V_i}{\partial a_p} = 0, \frac{dV_i}{ds_p} = 0 \quad (i < p); \quad \frac{da_i}{ds_p} = -\frac{1}{i}, \frac{dV_i}{ds_p} = +\frac{1}{i} \quad (i = p)$$

s. w. Die Functionaldeterminante der Coefficienten nach den Wurzeln genommen, ist ihrem absoluten Werte nach gleich der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung; für die Discriminante besteht eine Determinanten-Darstellung durch die  $V_p$ , welche bis auf gewisse Vorzeichen mit derjenigen durch die  $a_p$  identisch ist.

No.

J. HAMMOND. On the calculation of symmetric functions. Lond. M. S., Proc. XIII. 79-84.

Berechnung der symmetrischen Functionen von  $(n+1)$  Grössen aus denen von  $n$  Grössen.

No.



# Dritter Abschnitt.

## Zahlentheorie.

### Capitel 1.

#### A l l g e m e i n e s.

1. G. LEJEUNE - DIRICHLET. Lezioni sulla teoria dei numeri, pubblicate e corredate di appendici da R. Dedekind, tradotte della terza edizione da Aureliano Faifofer. Venezia, Tip. Emiliana. 1881. 8<sup>o</sup>.

2. CÉSARO. Formule d'arithmétique. Math. II. 97-101.

3. CÉSARO. Sur une nouvelle formule arithmétique. Math. I. b. 148-149.

Auszüge aus einer grösseren Arbeit, die 1883 in extenso erschienen ist. Das Referat wird daher bis dahin verschoben.

Mn.

4. KRONECKER. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. Kronecker J. XCIII. 338-364.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 48.

V. BOUNIAKOWSKY. Quelques remarques sur les propriétés d'une classe particulière des fractions décimales périodiques. Pétersb. Bull. XXVII.

Es wird hier auf einige periodische Decimalbrüche aufmerksam gemacht, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe derjenigen Glieder einer Periode, die gleich weit vom Anfang einer jeden Hälfte abstehen, gleich der Zahl 9 ist, und die ausserdem einer Congruenz, wie

$y_m \equiv y_{m-1} + y_{m-2} \pmod{9}$  oder  $y_m \equiv 2y_{m-1} + y_{m-2} \pmod{9}$  wo die  $y_m$  die Zahlen einer Periode bezeichnen, genügen.

Ty.

K. BRODA. Bildungsgesetz periodischer Brüche in bestimmten Zahlensystemen. Hoppe Arch. LXVIII. 85-100.

Das Problem wird hier in der Form behandelt, dass der Nenner eines gemeinsamen Bruches und die Stellenzahl des entsprechenden periodischen Decimalbruchs gegeben, hingegen die Grundzahl des zugehörigen Zahlensystems gesucht sein sollen. Hieran werden Untersuchungen über die Factoren der Form  $a^m + 1$  geknüpft und speciell der bekannte Teiler 641 der Form  $2^{2^5} + 1$  in eleganter Weise ermittelt.

Sn.

G. S. ELY. Note on partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 211.

In einer Tafel von ganzen Zahlen mit zwei Eingängen sei die Columnen mit  $i$ , die Zeilen mit  $j$  bezeichnet; zwischen den Elementen bestehe die Relation

$$n_{i,j} = n_{i-1,j+1} + n_{i,j-1}.$$

Die  $i$  beginnen mit 1, die  $j$  mit 0, und es sei

$$n_{1,j} = n_{i,0} = 1.$$

Mit solchen Tabellen soll schon Euler (Com. Arith. Coll. Vol. I.) sich beschäftigt haben. Die Anzahl der Zerlegung von  $i$  Din; in  $j$  Teile soll gleich  $n_{i,j}$  sein und dgl. m.

Sn.



1. MITCHELL. Note on partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 210.

Bezeichnet man durch das Symbol  $(w:i, j)$  die Anzahl verschiedener Teilungen der ganzen Zahl  $w$  in  $j$  oder weniger Teile,  $i$  keiner  $> i$ , und durch  $E$  die Anzahl der im Folgenden enthaltenen Ganzen, und ist

$$\varphi_j(w) = w - E\left(\frac{w+j-1}{j}\right) = E\left(\frac{(j-1)w}{j}\right),$$

ist

$$(w:i, j) = \sum_{x=w-i}^{x=\varphi_j(w)} (x:w, j-1).$$

Anwendung dieser Formel lässt sich Sylvester's Formel für die Darstellung von  $(w:i, j) - (w-1:i, j)$  in Termen der Teilungen  $i$ ter Ordnung, Messenger (2) VIII. 1—8 (s. F. d. M. X. 1878. 2) herleiten. H.

1. SYLVESTER. On a question in partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 179.

Kurze, dunkle Notiz über die Zerlegung einer gegebenen Zahl in eine Reihe, deren einzelne Glieder das arithmetische Mittel der beiden benachbarten nicht übersteigen sollen.

Sn.

J. SYLVESTER. On a geometrical treatment of a theorem in numbers. J. Hopkins Circ. 1882. 415.

Sn.

D. WEYR. Ueber Perott's Beweis, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Cas. XI. 53. (Böhmisch).

Enthält eine kommentierte Reproduktion dieses Beweises, vgl. sich Darboux Bull. (2) V. 183-184 (s. F. d. M. XIII. 1881. 133) findet. Std.

W. W. JOHNSON. Mr. Glaisher's enumeration of primes for the first nine millions. *Anal* IX. 133-134.

Bericht über die betreffenden Arbeiten nach den Rep. of the Brit. Ass. Jn. (O.).

L. OPPERMAN. Om vor Kundskab om Primtallenes Mængde mellem givne Grændser. *Kopenh. Overs.* 1869. 169-179.

In diesem Aufsatze giebt der Verfasser eine gedrängte Übersicht über die verschiedenen Arbeiten, auf denen unsere jetzige Kenntnis der Verteilung der Primzahlen beruht. Einerseits werden die directen Aufzählungen von Chernie, Burchardt, Dase, Rosenbergs und Glaisher, andererseits die theoretischen Untersuchungen von Legendre, Gauss, Tchébycheff, Riemann, sowie die directen Berechnungen von Meissel berücksichtigt. Beiläufig wird der folgende unbewiesene Erfahrungssatz angeführt: Wenn die ganze Zahl  $n > 1$  ist, so liegt zwischen  $n(n-1)$  und  $n^2$ , sowie zwischen  $n^2$  und  $n(n+1)$  wenigstens je eine Primzahl. Ferner wird bemerkt, dass in den Burchardt'schen Tafeln die beiden Primzahlen 3026279 und 1330001 fehlerhaft als zusammengesetzte Zahlen aufgeführt sind. Gm.

F. STUDNIČKA. Bemerkung über Primzahlen. *Cas.* XI. 131.

Enthält Historisches über die Fermat'sche Zahl  $F_{23}$ .

Std.

E. DE JONQUIÈRES. Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. *C. R.* XCV 1144-1146.

E. DE JONQUIÈRES. Sur la formule récemment communiquée à l'Académie au sujet des nombres premiers *C. R.* XCV. 1343-1344.

APSCHITZ. Sur une communication de M. de Jonquières relative aux nombres premiers. C. R. XCV. 1344-1346.

Herr de Jonquières hat durch geschickte Handhabung der Sieb des Eratosthenes' bekannten Methode eine Formel die Anzahl der eine gegebene Zahl  $P$  nicht übersteigenden Zahlen gefunden; diese indes findet sich, wie er in der 1ten Note bemerkt, schon in Legendre's Théorie des nombres IV, 2<sup>te</sup> Aufl. 1808, 414), wenn auch ohne Beweis. Herr Apshitz weist den Zusammenhang jener Formel mit gewissen entheoretischen Sätzen nach, welche er bereits früher der Académie vorgelegt habe. (C. R. LXXXIX. 948—950, vgl. auch M. XI. 1879, 142—143). Sn.

LEMOINE. Décomposition d'un nombre premier  $N$  en des puissances  $n^{\text{ièmes}}$  maxima. C. R. XCV. 719-722.

Es werde von der Zahl  $N$  die grösste in ihr enthaltene Quadratzahl abgezogen, vom Rest wieder die grösste in diesem Rest enthaltene Quadratzahl und so fort bis zur Erschöpfung der Zahl  $N$ . Die Anzahl der zu dieser Darstellung gebrauchten Quadratzahlen sei  $p$ . Der Herr Verfasser sucht alsdann für ein gegebenes  $p$  das kleinstmögliche  $N$ , welches er mit  $y_p$  bezeichnet, und findet, dass alle  $y_p$ , welche einem graden  $p$  entsprechen, mit den Ziffern 67 enden, und die einem ungraden  $p$  entsprechen, mit den Ziffern 23. Allgemein besteht die recurrirende Formel:

$$y_{p+1} = \left(\frac{y_p+1}{2}\right)^2 + y_p.$$

Am Schlusse finden sich Hinweise auf den Fall, dass die Quadratzahlen durch Cubikzahlen ersetzt werden, u. s. f.

Sn.

ETERSEN. Om Primtal. Zeuthen T. (4) VI. 138-143.

Aus dem bekannten Ausdrucke mittels unvollständiger Quotienten für den Exponenten der höchsten Potenz einer Primzahl  $p$ ,

die in dem Producte  $n!$  aufgeht, wird die folgende Formel abgeleitet

$$\frac{(a+b)!}{a! b!} = \prod p^{\frac{t_a + t_b - t_{a+b}}{p-1}},$$

wo sich das Product  $\prod$  auf alle Primzahlen  $p$  erstreckt, und  $t_a$  die Quersumme der Zahl  $a$  in einem System, dessen Basis  $p$  ist, bezeichnet.

Ferner wird gezeigt, wie man für das kleinste gemeinsame Multiplum der Zahlen bis  $n$  eine Formel angeben kann, und diese wird demnächst zur Auffindung von Grenzen der Anzahl der Primzahlen bis  $n$  benutzt. Das angewendete Verfahren kann wesentlich als eine geschickte Aenderung der Methode von Tchebycheff betrachtet werden und giebt auch als Resultat Grenzen, welche nur unbedeutend von den seinigen abweichen. Das Verfahren besitzt den Vorzug, etwas schneller zum Ziele zu führen.

Gm.

ED. WEYR. Ueber einen zahlentheoretischen Satz.

Cas. XI. 39. (Böhmisch).

Ist  $\nu$  eine beliebige ganze Zahl, deren Zusammensetzung durch die Formel

$$\nu = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_m^{n_m}$$

gegeben erscheint, wobei die  $q_k (k = 1, 2, \dots, m)$  Primzahlen bedeuten, so ist bekanntlich der Ausdruck

$$p^\nu - \sum p^{\frac{\nu}{q_1}} + \sum p^{\frac{\nu}{q_1 q_2}} - \dots + (-1)^{m-1} \sum p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \dots q_{m-1}}} + (-1)^m \sum p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \dots q_m}}$$

durch  $\nu$  teilbar, falls  $p$  eine Primzahl vorstellt. Dieses Theorem wird nun auf beliebige ganze Zahlen  $p$  erweitert.

Std.

A. P. MININ. Ueber Eigenschaften von Zahlen, die den vollkommenen analog sind. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch)

In dieser Abhandlung werden die Zahlen untersucht, die die Eigenschaft besitzen, einen aliquoten Teil der Summe aller

hlen auszumachen, die kleiner als sie und relativ prim zu  
ien sind. Ty.

. ANDRÉ. Sur la divisibilité d'un certain quotient par  
les puissances d'une certaine factorielle. C. R. XCIV.  
426-428.

Arithmetischer Beweis des Satzes: Bezeichnet  $x$  eine Zahl,  
elche nicht als Summe von weniger als  $k$  Potenzen einer und  
erselben Primzahl dargestellt werden kann, so ist der Quotient

$$\frac{(nx)!}{(x!)^n (n!)^k}$$

ine ganze Zahl.

Sn.

1. CAYLEY. A proof of Wilson's theorem. Mess. (2) XII. 41.

Der Satz heisst: „Wenn  $n$  eine Primzahl ist, so ist  
.2... $(n-1)+1$  teilbar durch  $n$ “, und wird durch Betrachtung  
es Polygons, welches aus der Verbindung von  $n$  Punkten ent-  
teht, gewonnen. Glr. (O.).

2. CATALAN. Extrait d'une lettre. Darb. Bull. (2) VI. 224.

Es ist

$$(x+y+z)^{2m+1} - x^{2m+1} - y^{2m+1} - z^{2m+1}$$

lets durch  $(x+y)(y+z)(z+x)$  teilbar.

Sn.

3. SCHIER. Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen.

Wien. Ber. LXXXV. 503-508.

Die Arbeit erscheint als Fortsetzung einer früheren dessel-  
en Verfassers. Wir verweisen auf das damalige Referat  
ines anderen Referenten, dessen Einwände auch auf die am  
nde der vorliegenden Analyse wiederholten Resultate noch in  
kraft bleiben. (Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 135). Sn.

K. SCHWERING. Untersuchung über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen. Schlömilch Z. XXVII. 102-119.

Herleitung der Kummer'schen Normalform für obige Einheitswurzeln. Fünfteilung der Kreisteilungsgleichungen. Eigenschaften der entsprechenden Perioden, Relationen zwischen denselben, Charakter von 2, 3, 5,  $\eta$ . Die Periodengleichung.

Sn.

N. V. BUGAEFF. Ueber einige Eigenschaften der Reste und der Zahlsummen. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch)

Diese Abhandlung ist der Summation der kleinsten positiven Reste einer linearen Form, speciell auch der quadratischen und cubischen Reste, gewidmet.

Ty.

T. J. STIELTJES jr. Over het quadratische rest-karakter van het getal 2. Nieuw Arch. IX. 193-195.

Wie der Titel sagt, beschäftigt sich diese kurze Arbeit mit quadratischen Resten vom Charakter 2.

G.

L. MATTHIESSEN. Ueber eine antike Auflösung des sogenannten Restproblems in moderner Darstellung. Hoffmann Z. XIII. 187-190

GERLACH. Das Restproblem für nicht teilerfremde Divisoren. Hoffmann Z. XIII. 351-354.

Eine von dem buddhistischen Priester und Astronomen Yih-hing († 717 u. Chr.) gegebene Lösung des Systems

$N \equiv r_1 \pmod{m_1}$ ,  $N \equiv r_2 \pmod{m_2}$ ,  $N \equiv r_3 \pmod{m_3}$ , u. s. w. wird in der ersten Mitteilung discutirt, in der zweiten bewiesen.

Sn.

LET. Sur les résidus cubiques et biquadratiques  
divant un module premier. S. M. F. Bull IX. 157-162.

Einfache Darlegung des Zusammenhanges der Reciprocitäts-  
etze für die quadratischen, cubischen, biquadratischen Reste  
den Kreisteilungsgleichungen in den Fällen, wo die Anzahl  
Perioden 2, 3, 4 ist. Einige allgemeine Notizen über die  
egung dieser Gleichungen nach einem Primzahlmodul. Der  
adratische Charakter der Zahl 2.

Sn.

[. STIELTJES jr. Bijdrage tot de theorie der derde-en  
ierde-machts resten. Amst., Versl. en Meded. XVII. 338-417.

Die Arbeit behandelt die Theorie der cubischen und biqua-  
ischen Reste und schliesst sich in dieser Hinsicht an die be-  
te, indessen unvollendet gebliebene Abhandlung von Gauss:  
eoria residuorum biquadraticorum“ an. Das allgemeine Reci-  
itätsgesetz ist später von Eisenstein (Crelle J. Band 28) be-  
en. Hier werden dieselben Theorien auf eine andere Weise  
ndelt, die darauf beruht, dass die Primzahl, deren Charakter  
mmt werden soll, ersetzt wird durch ein congruentes Pro-  
von Factoren.

Der Charakter dieser Factoren wird durch Betrachtungen  
mmt, die mit denen, welche das oben genannte Werk von  
ss enthält, übereinstimmen; nur findet eine Erweiterung auf  
plexe Zahlen statt. Auf diese Weise wird der Charakter von  
in Beziehung auf eine Primzahl von der Form  $a+bi$  be-  
mt, ebenso werden die Zahlen mit einem Modulus von der  
n  $4n+3$  behandelt. Dann werden alle Sätze bewiesen,  
he von Gauss auf inductivem Wege gefunden und in Art. 28  
Th. res. biq. zusammengestellt sind. Der Beweis beruht auf  
Theorie der complexen Zahlen, welche hier als Hilfsmittel  
aucht wird, da die Sätze selbst sich nur auf reelle Zahlen  
ehen.

G.

F. HOFMANN. Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über eine Erweiterung des Congruenzbegriffes. Klein Ann. XL. 471-487.

Der zu beweisende Satz findet sich bei Gauss (Disq. ar. 81):  $p$  sei Primzahl; dann ist die Summe aller primitiven Wurzeln der Congruenz  $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  durch  $p$  teilbar, falls  $p-1$  durch ein Quadrat teilbar ist, und  $\equiv (-1)^n \pmod{p}$ , falls  $p-1$  ein Product von  $n$  verschiedenen Factoren ist. Die Beweismethode besteht in einer Gruppierung der Potenzen einer primitiven Wurzel von  $p$ , einer Anordnung derselben in regulären Polygonen auf der Peripherie eines Kreises. Herr Adolf Hurwitz giebt eine analytische Formulirung des Beweises. Die Erweiterung des Congruenzbegriffes bezieht sich auf Brüche und Wurzeln; der Herr Verfasser beruft sich auf den Vorgang von Gauss, um die Bezeichnungen

$$\sqrt[n]{a} \equiv b \pmod{p}, \quad \frac{a}{b} \equiv c \pmod{p}$$

einzuführen, und schreibt also z. B. mod. 13:

$$\frac{\sqrt{-1}}{2} \equiv \frac{\sqrt{12}}{2} \equiv \frac{5}{2} \equiv 9.$$

Sn.

B. STANKEWITSCH. Zur Theorie der Congruenzen mit einer Veränderlichen in Bezug auf einen Primzahlmodulus. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

In dieser Note werden folgende drei Theoreme über Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodulus bewiesen:

I. Ist die Congruenz  $x^2 - q \equiv 0 \pmod{p}$  möglich, so werden die Zahlen

$$A = S_{i-1} + S_{i-3} \cdot q + S_{i-5} \cdot q^2 + \cdots + S_1 \cdot q^{\frac{i-2}{2}},$$

$$B = S_i + S_{i-2} \cdot q + S_{i-4} \cdot q^2 + \cdots + q^{\frac{i}{2}},$$



$i = \frac{p-1}{2}$  ist, und  $S_k$  die Summe der Zahlen  $1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$  je  $k$  bedeutet, nie durch  $p$  teilbar, und die einzige immer stirende Lösung der Congruenz

$$Ax - B \equiv 0 \pmod{p}$$

identisch mit derjenigen der Lösung der Congruenz

$$x^2 - q \equiv 0 \pmod{p},$$

zu ihrem kleinsten positiven Reste eine Zahl aus der Reihe  $2, 3, \dots, \frac{p-1}{2}$  hat.

II. Hat die Congruenz  $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$  vom Grade  $n$   $n$  ganzzahligen Coefficienten  $n$  Wurzeln, so wird wenigstens eine von diesen Wurzeln auch der Congruenz

$$f_{p-n}(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{p-n}) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{p-n}$  irgend welche  $p-n$  Zahlen aus der Reihe  $1, 2, 3, \dots, p-1$  bezeichnen) genügen.

Nach dem Beweise dieses Theorems wird eine auf dasselbe basirte Methode zum Auffinden aller Lösungen der Congruenz

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

gegeben.

III. Es sei  $\omega$  der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen  $m$  und  $p-1$ , dann lässt sich bekanntlich die Lösung der Congruenz

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

auf die folgende:

$$x^\omega - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

zurückführen. Nun sei jetzt  $F(x)$  (in Bezug auf den Modulus  $p$ ) der grösste gemeinsame Teiler von  $x^\omega - 1$  und der Function

$$P = (x^{\frac{\omega}{a}} - 1)(x^{\frac{\omega}{b}} - 1)\dots(x^{\frac{\omega}{k}} - 1),$$

wo  $a, b, c, \dots, k$  die verschiedenen Primzahlen bezeichnen, die  $\omega$  aufgehen, und  $f(x)$  der Quotient der Function  $x^\omega - 1$  durch  $P(x)$ , dann sind die Wurzeln der Congruenz

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

die primitiven Wurzeln der Congruenz

$$x^{\omega}-1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ty.

N. V. BUGAEFF. Die Lösung der Congruenzen 2<sup>ten</sup> Grades in Bezug auf einen Primzahlmodulus. Mosk. S. X. Lief. 2 (Russisch).

Der Satz von Wilson giebt für die Congruenz

$$x^2 + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

die Lösung

$$x \equiv 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2} a \pmod{p}.$$

Ist  $p = 8u + 5$ , so wird die Congruenz

$$n^2 \equiv q \pmod{p},$$

im Falle, dass sie eine Lösung hat, also im Falle, dass

$$q^{4n+2} \equiv q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, durch die Formeln

$$u = \pm q^{\frac{p+3}{8}} \pmod{p}$$

oder

$$u \equiv 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2} q^{\frac{p+3}{8}} \pmod{p}$$

gelöst, je nachdem

$$\text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} q^{2n+1} \equiv 1 \\ q^{2n+1} \equiv -1 \end{array} \right\} \pmod{p}$$

ist. Es sei jetzt  $p = 2^{\lambda} l + 1$ , wo  $l$  irgend eine ungrade Zahl bezeichnet. Die Congruenz  $z^2 \equiv q \pmod{p}$  ist unter der Bedingung

$$q^{2^{\lambda-1} l} \equiv 1 \pmod{p}$$

möglich. Setzt man  $q^l = Q$ , so nimmt diese Bedingung folgende Gestalt an:

$$Q^{2^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p},$$

als entweder zu der Congruenz

$$\left. \begin{array}{l} Q^{\lambda-2} - 1 \equiv 1 \\ Q^{\lambda-2} + 1 \equiv 0 \end{array} \right\} \pmod{p}$$

führt. Der erste Fall wird uns durch wiederholte Zerlegung der linken Seite in zwei Factoren entweder zur Congruenz

$$Q = q' \equiv 1 \pmod{p}$$

führen, und dann wird uns die Congruenz

$$u \equiv q^{\frac{\lambda+1}{2}} \pmod{p}$$

die Lösung der vorgelegten Congruenz zweiten Grades geben, oder zur Congruenz

$$Q^{\mu} + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

so  $\mu < \lambda$  ist; dann hat man zwei Wege, um die Zahl  $\mu$  zu erledigen: 1) mit Hülfe einer primitiven Wurzel  $a$  der Zahl  $p$ ; die Lösung wird durch die Congruenz ersten Grades

$$a^{l\varrho} u \equiv q^{\frac{\lambda+1}{2}} \pmod{p}$$

gegeben, wo  $\varrho$  durch die Formel

$$q' \equiv a^{2l\varrho} \pmod{p}$$

bestimmt ist; 2) mit Hülfe des quadratischen Nichtrestes  $n$ ; dann ist die Lösung durch die Congruenz

$$n^{l\varrho} u \equiv q^{\frac{\lambda+1}{2}} \pmod{p}$$

gegeben, wo  $\varrho$  durch die Formel

$$q' \equiv n^{2l\varrho} \pmod{p}$$

bestimmt ist.

Ty.

MIGOTTI. Zur Theorie der Kreisteilung. Wien. Ber. LXXXVII. 8-14.

Eigenschaften der Gleichung, deren Wurzeln die sämtlichen primitiven  $m^{\text{ten}}$  Wurzeln sind, für eine zusammengesetzte Zahl  $m$ . Relationen zwischen den Potenzsummen dieser Wurzeln. Beson-

ders eingegangen wird auf den Fall, wo  $m$  das Product zweier Primzahlen  $p$  und  $q$  ist. Bezeichnet man die  $p^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln mit

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{p-1},$$

die  $q^{\text{ten}}$  mit

$$\beta, \beta^2, \beta^3, \dots, \beta^{q-1},$$

so sind die  $(p-1)(q-1)$  primitiven  $(pq)^{\text{ten}}$  Einheitswurzeln in der Form  $\alpha^e \cdot \beta^s$  enthalten. Es wird streng bewiesen, dass die gesuchte Gleichung keine anderen Coefficienten als 0 und 1 haben kann. Sn.

SCHWERING. Zur Theorie der algebraischen Functionen, welche von Jacobi  $\psi(\alpha)$  genannt werden. Kronecker J. XCIII. 334-338.

Herr Schwering zeigt, dass  $1 + \psi(\alpha)$  immer durch  $(1-\alpha)^4$  teilbar ist; ferner, dass die Anzahl der verschiedenen Functionen  $\psi(\alpha)$  sofort auf den sechsten Teil der sich zunächst darbieten den reducirt werden kann. Sn.

S. J. BASKAKOFF. Ueber eine Methode, Zahlidentitäten zu finden, und ihre Anwendung auf die Theorie der Zahlenfunctionen. Mosk. S. X. Lief. 3. (Russisch).

In dieser Abhandlung werden die Formeln von Liouville bewiesen, die er in zwölf Artikeln: „Sur quelques formules générales, qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres“ (Journal des mathématiques, 1858 et 1859) gegeben hat. Ty.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala. E. Berling.

In den einleitenden Paragraphen werden die bekannten Grundeigenschaften der Gammafunction, ihrer logarithmischen Ableitung und der Stirling'schen Reihe entwickelt. Aus diesen er-

sich eine grosse Zahl von Lehrsätzen über die mittleren  
e solcher Quotienten, deren Zähler zahlentheoretische Func-  
n des Nenners sind. Als solche Functionen werden zu-  
st allgemein die symmetrischen Functionen der Divisoren  
ganzen Zahl betrachtet; sodann speciell deren Anzahl,  
ne, Summe der Reciproken, Summen von graden oder un-  
en Potenzen dieser Reciproken, Summe der Logarithmen,  
tionen von der Form  $\Sigma a^x$  und  $\Sigma x a^x$ , u. s. f. Die gefundenen  
sind folgender Art: „Die Summe der Divisoren einer ganzen  
ist im Mittel  $\frac{1}{6}\pi^2$  mal so gross, als die Zahl selbst.“ Oder:  
l  $d_1, d_2, \dots, d_n$  alle Teiler einer ganzen Zahl und  $a$  eine  
ve Grösse, kleiner als Eins, so ist die Summe

$$d_1 \cdot a^{d_1} + d_2 \cdot a^{d_2} + \dots + d_n \cdot a^{d_n}$$

littel gleich  $\frac{a}{1-a}$  „ u. dgl. m.

Die folgenden Abschnitte behandeln die Reste, welche bei  
Division einer ganzen Zahl durch alle kleineren übrig bleiben.

: „Das arithmetische Mittel dieser Reste ist das  $\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)$ -  
e der Zahl selbst.“ Oder: „Bringt man die Grössen

$$\sqrt[2s]{\frac{n}{1}}, \sqrt[2s]{\frac{n}{2}}, \sqrt[2s]{\frac{n}{3}}, \dots, \sqrt[2s]{\frac{n}{n}}$$

die Form:

ganze Zahl + Bruch,

ei  $s$  eine ganze Zahl bezeichnet, so ist die mittlere Summe  
dieser Brüche für  $n=\infty$

$$2^{2s} - \frac{B_s (2^{2s-1} - 1) 2(\pi)^{2s}}{(2s)!},$$

3. die  $s^{\text{te}}$  Bernoulli'sche Zahl.“

Sn.

10. Applications de la dérivation d'Arbogast à la  
olution de la partition des nombres et à d'autres  
oblèmes. Résal J. (3) VIII. 61-72.

Eine Methode zur Entwicklung von

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

nach ganzen Potenzen von  $x$ , welche bisher nur von LAGRANGE reproducirt und verwandt worden, findet neue interessante Anwendungen auf eine Reihe von zahlentheoretischen und algebraischen Problemen, z. B. auf die Darstellung der Discriminante einer Gleichung, der Eliminationsresultante von zwei Gleichungen auf die Umkehrung der Reihen. Es wird gezeigt, wie man alle ganzzahligen Lösungen der bekannten Gleichung

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots = n$$

sofort, ohne Rechnen und ohne Probiren, hinschreiben kann. Endlich giebt der Herr Verfasser noch eine besondere Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, z. B. der dritten:

$$B_3 = \frac{1}{2^0 \cdot 3^1 \cdot 4^2 \cdot 5^3 \cdot 6^4 \cdot 7^5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \cdot 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \cdot 3 & 4 \cdot 3 \cdot 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \cdot 4 & 5 \cdot 4 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \cdot 5 & 6 \cdot 5 \cdot 4 & 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 & 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ 1 & 7 & 7 \cdot 6 & 7 \cdot 6 \cdot 5 & 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 & 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \end{vmatrix},$$

deren Gesetz einleuchtet.

Sn.

CH. MÉRAY. Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré. C. R. XCIV. 1167-1169.

Ein System von  $m$  ganzzahligen Gleichungen ersten Grades mit  $n$  Unbekannten ( $n \geq m$ ) sei vorgelegt; alle Systeme von ganzzahligen Lösungen zu finden. Es wird nur die Form der allgemeinen Auflösung gegeben und die genauere Analyse, welche auch die Ermittlung der in dieser enthaltenen Constanten ermöglichen soll, versprochen.

Sn.

MORET - BLANC. Démonstration des propositions de M. Lionnet. Nouv. Ann. (3) I. 357-365.

Es werden einige diophantische Gleichungen mitgeteilt, welche nur triviale Lösungen zulassen, z. B. soll die Summe von  $a$

ander folgenden Quadraten ungrader Zahlen nie eine Trigonal-  
l ergeben, und ähnliches. Sn.

DURFEE. Note on some properties of the numerical  
olutions of  $ax^2 - y^2 = -1$ . J. Hopkins Circ. 1882. 78.

Wenn man die ganzzahligen Lösungen der obigen Gleichung,  
Grösse nach geordnet, mit  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots$  bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}x_n y_{n+1} - x_{n+1} y_n &= -x_1, \\ ax_n x_{n+1} - y_n y_{n+1} &= -y_1.\end{aligned}$$

Sn.

VILICUS. Ueber ganzzahlige Verhältnisgruppen in  
er Alligationsrechnung. Z. f. Realsch. VII. 213-221.

Nachweis, dass die Aufgaben der Mischungsrechnung mit  
eil auf die Lösung einfacher diophantischer Gleichungen  
ckzuführen seien. Gr.

HERMES. Gleichungen ersten und zweiten Grades  
chematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Leipzig. Teubner.

Eine Zusammenstellung der Regeln, welche zur kürzesten  
rechnung der Lösungen von diophantischen Gleichungen ersten  
zweiten Grades erforderlich sind. Die Beweise sind in  
m Anbange nur angedeutet; als Zweck der Arbeit erscheint  
wirkliche Ausführung der Rechnungen, welche denn auch  
h zahlreiche Beispiele illustriert ist. Den Rechnungen ist die  
endivision durchgängig zu Grunde gelegt. Die Gleichungen  
n Grades finden durch die Aufsuchung der Näherungswerte  
s Kettenbruchs in bekannter Weise ihre Erledigung, während  
n des zweiten Grades zunächst drei Specialfälle:

$$Bxy + Cx + Dy + F = 0,$$

$$x^2 \pm Py + R = 0,$$

$$ax^2 + 2bxy + a_1y^2 = P$$

vorangeschickt werden. Die Analyse ist mit besonderem Augenmerk auf die Erschöpfung aller erdenklichen Fälle durchgeführt. Im Laufe derselben finden sich speciell sieben Fälle hervorgehoben, in welchen die allgemeine diophantische Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

keine oder nur triviale Lösungen erlaubt.

Sn

PEPIN. Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné. Brux. S. Sc. VI. B. 86-100.

Verallgemeinerung der Sätze von Jonquières (Nouv. Ann. (XVII. 374, siehe F. d. M. X. 1878. p. 145). Zur Charakterisirung mögen zwei Beispiele angeführt werden: I. Die Lösung der Gleichung  $x^3 + a = y^2$  in ganzen Zahlen ist unmöglich, wenn  $a = c^3 - 4^\alpha b^3$ , wo  $b$  und  $c$  zwei ungrade, positive oder negative Zahlen bezeichnen, von denen die erste keinen Teiler von der Form

$$8l + 1, 8l + 3, 8l + 7 \text{ für } \alpha = 1,$$

von der Form

$$8l + 3, 8l + 5, 8l + 7 \text{ für } \alpha > 1$$

hat. II. Wenn 6 relativ prim zu 10 ist, und keinen Factor von der Form  $20l + 11$  enthält, und wenn  $a = 32(2d + 1)^3 - 5b^3$  ist, so giebt es für  $x^3 + a = y^2$  keine Lösung in ganzen Zahlen.

Mn. (O.).

S. GÜNTHER. Ueber einen Specialfall der Pell'schen Gleichung. Bair. Bl. XVII. 19-24.

Theon Smyrnaeus ist, wie aus seinem mathematischen Commentar zu Platon's Werken erhellt, mit folgenden Relationen vertraut:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1^2 - 1 &= 1^2, & 2 \cdot 5^2 - 1 &= 7^2, \\ 2 \cdot 29^2 - 1 &= 41^2, & 2 \cdot 169^2 - 1 &= 239^2, \dots; \end{aligned}$$

man muss also annehmen, dass er die Pell'sche Gleichung

$$2x^2 - 1 = y^2$$



verstanden habe. Es erhebt sich die Frage, wie er kommen sei, und als ein Weg, der ihn möglicherweise Resultaten führen konnte, sich auch vollständig innerhalb unbestimmten Analytik des Altertums gezogenen Grenzen der folgende gelten. Aus

$$x + 1 = \frac{p}{q}(y + x), \quad x - 1 = \frac{q}{p}(y - x)$$

ann  $p^2 + 2pq - q^2 = z^2$  gesetzt wird,

$$\frac{q^2 + z \mp 2q\sqrt{2q^2 + z}}{z}, \quad y = \frac{-4q^2 - z \pm 4q\sqrt{2q^2 + z}}{z}.$$

un für  $z = 1$  irgend eine Zahl  $q$  bekannt ist, für welche in vollkommenes Quadrat wird, liefert diese Lösung eine he Anzahl ganzzahliger Werte für  $x$  und  $y$ . Ebenso Auflösung der allgemeineren Gleichung

$$(a^2 + b^2)x^2 - 1 = y^2$$

ührt. Diese elementare Methode ähnelt derjenigen, deren h Paul Tannery's Ansicht Archimedes bei der Behand- Gleichungen

$$3x^2 \mp 1 = y^2$$

haben soll.

Gr.

LIS. Solution d'une question (58). Math. II. 64-67.

ung der Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = K(x^2 + y^2 + z^2), \quad K = 7, 19, 67, \dots$$

n Zahlen.

Mn.

IN. Nouveaux théorèmes sur l'équation indéter- e  $ax^4 + by^4 = z^2$ . C. R. XCIV. 122-124.

e Fälle neuer Fälle wird mitgeteilt, in welchen die ophantische Gleichung unlöslich sein soll.

Sn.

A. N. KORKIN. Ueber die Unmöglichkeit der Gleichung  
 $x^n + y^n + z^n = 0$  durch ganze Functionen zu genügen.  
 Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

Von der im Titel bezeichneten Unmöglichkeit wird hier ein  
 Beweis gegeben. Ty.

A. CAYLEY. Note on the standart solutions of a system  
 of linear equations. Quart. J. XIX. 38-41.

„Normallösungen“ für ein System von linearen homogenen  
 Gleichungen, deren Anzahl geringer ist als die der Unbekannten  
 construirt Herr Cayley folgendermassen: Den Unbekannten wird  
 eine Reihenfolge gegeben  $x_1, x_2, x_3, \dots$ ; als erste Lösung gilt  
 diejenige, bei der möglichst viele der ersten auf einander folgen-  
 den  $x$  gleich 0 sind, während die nächste Unbekannte gleich 1  
 gesetzt wird; etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0; x_7 = 1, \dots$$

Als zweite Lösung gilt die, bei welcher  $x_7 = 0$  ist, möglichst  
 viele der ersten auf einander folgenden  $x$  gleich 0 werden, und  
 das erste nicht verschwindende gleich 1 ist, also etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0; x_5 = 1, x_6 = \xi_6, x_7 = 1, \dots$$

Für die nächste Lösung wird  $x_5 = 0, x_7 = 0$  gefordert; ausser  
 dem sollen möglichst viele der ersten auf einander folgenden  
 gleich 0, und das erste nicht verschwindende gleich 1 sein, also etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0; x_4 = 1, x_5 = 0, x_6 = \xi'_6, x_7 = 0, \dots$$

u. s. w. Aus diesen Lösungen lässt sich jede Lösung des System  
 zusammensetzen. Es wird eine Anwendung auf die Berechnung  
 einer Semiinvariante gegeben. No.

H. SCHEFFLER. Die magischen Figuren. Allgemein  
 Lösung und Erweiterung eines aus dem Altertum  
 stammenden Problemes. Leipzig. Teubner.

Die geschichtliche Einleitung zu dieser Schrift ist, da der  
 Verfasser nur das Klügel'sche Wörterbuch zur Richtschnur g

und von späteren Bearbeitungen des Problems keine genommen zu haben scheint, etwas mager ausgefallen; so wohl auch die Behauptung (S. 5), dass man bisher das „nämliche“ magische Quadrat (bei welchem nicht nur

$$a_{i,k} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{k,i} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

gleich, sondern auch

$$a_{i,k+i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,k+i-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

den gleichen Wert haben sollen, wie die beiden ersterwähnten) viel zu wenig gewürdigt habe, kaum aufgestellt worden denn der vorhandenen Literatur etwas mehr Beachtung zugeteilt worden wäre. Hat doch schon der Byzantiner Moschopoulos diesen allgemeinen Diagonalreihen gerecht zu werden, erst bei ihm vorkommenden Begriff des cyklischen Aneinandernehmens aufgestellt. Diese Bemerkungen beabsichtigen jedoch in keiner Weise, die Verdienstlichkeit dieser umfassenden und neuen Neubearbeitung einer altehrwürdigen Aufgabe zu schmälern, vielmehr behalten die Methoden des Verfassers, wenn sie stellenweise mit den von Hugel, Frost u. A. angewandten, einstimmen, ihren vollen und selbständigen Wert. Eine Besonderheit der Schrift ist es, dass die Regeln zur Construction der magischen Figuren für sich vorgetragen sind, die Beweise in einem besonderen Anhang vereinigt sind. Zur Darstellung der Zauberquadrate mit ungrader Zellenanzahl dient die folgende elegante Vorschrift: Man wähle vier verschiedene ganze Zahlen  $a, b, a', b'$  von der Beschaffenheit, dass  $a$  und  $a'$  zu  $n$  und  $b$  und  $b'$  zu  $n$  in gleichen Theilen theilbar sind, sowie jede der fünf Verbindungen  $ab' - a'b$ ,  $a + b'$ ,  $a - a'$ ,  $b - b'$  relativ prim zu  $n$  (event. auch  $= 1$ ) bilde aus denselben die nachstehenden Werte:

$$\begin{array}{l} + 0.b'n \\ + 1.b'n \\ + 2.b'n \\ \vdots \\ + (i-1).a' + (n-i).b'n, \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + (a + 0.a') \quad + (b + 0.b')n \\ 1 + (a + 1.a') \quad + (b + 1.b')n \\ 1 + (a + 2.a') \quad + (b + 2.b')n \\ \text{etc. bis zu} \\ 1 + (a + (n-1).a') + (b + (n-1).b')n, \end{array} \right.$$



struction magischer Polygone und betritt damit ein Gebiet, welches vor ihm noch gar nicht bebaut war; nur das mit wenigen Worten abgemachte magische Rechteck hatte sich vorher schon armuth zum Studienobjecte ersehen. Man denke sich ein regelmässiges Vieleck, umgeben von einer Reihe anderer Vielecke von gleicher Seitenzahl und in ähnlicher Lage; dann soll eine gewisse Menge ganzer Zahlen so auf den Umfängen dieser Vielecke verteilt werden, dass stets die nämliche Summe herauskommt, man mag von jeder beliebigen Seite die darauf stehenden Zahlen zusammen addiren. Nachfolgend sehen wir ein magisches Dreieck und ein magisches Fünfeck vor uns.

1.

26.	3.	6.	10.	24.	27.
18.	20.	9.	11.	21.	2.
22.	15.	16.	17.	8.	5.
4.	7.	12.	13.	23.	
	1.	19.	14.		
		25.			

	28.	26.			
	10.	15.	11.		
25.	18.	17.	27.		
4.	12.	6.	13.	3.	
29.	19.		21.	22.	
	9.	14.	20.	11.	7.
	24.			31.	
	2.	30.	8.	23.	5.

**Für das Dreieck liefert Umlauf I.:**

$$\begin{aligned} 26+3+6+10+24+27 &= 27+2+5+23+14+25 \\ &= 25+1+4+22+18+29 = 96, \end{aligned}$$

mlauf II.:

$$20+9+11+21 = 21+8+13+19 = 19+7+15+20 = 61.$$

**für das Fünfeck liefert Umlauf I.:**

$$1+28+10+25+4 = 4+29+9+24+2 = 2+30+8+23+5 \\ = 5+31+7+22+3 = 3+27+11+26+1 = 68,$$

**mlauf II.:**

$$15+18+12 = 12+19+14 = 14+20+11 = 11+21+13 \\ = 13+17+15 = 45.$$

iese Untersuchungen über magische Vielecke bilden unstreitig  
 2 neues und schönes Capitel der angewandten Zahlentheorie.  
 idlich kommt noch der vollkommene magische Würfel an die  
 ihe; die Methoden, welche zu dessen Construction angewendet

werden, bestehen durchweg in Verallgemeinerungen derjenigen, welche sich bereits in der Ebene bewährten; ja es würde offenbar möglich sein, ohne Veränderung des Grundgedankens die Lösung auch auf ein Gitter von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen. In dieser Consequenz liegt einer der Hauptvorteile der Scheffler'schen Theorie.

Anhangsweise zeigt der Verfasser, dass die gewöhnlich nur als eine etwas abstruse Verstandesübung aufgefasste Lehre vom magischen Quadrat in der Combinatorik nicht selten eine zweckmässige Verwendung findet. Da ferner jedes Element eines solchen Quadrates als eine Summe von der Form  $(x + y)$  betrachtet wird, so liegt es nahe, zu untersuchen, ob nicht auch die Substitution  $(x + yi)$  sich mit Erfolg durchführen liesse. Es ist damit für die bekannte graphische Darstellung der complexen Zahlen die Möglichkeit gegeben, ihren ohnehin schon so reichen Wirkungskreis noch mehr zu erweitern. Gr.

TH. HARMUTH. Ueber polydimensionale Zahlenfiguren.

Hoppe Arch. LXIX. 90-108.

Der Herr Verfasser dehnt seine früheren Untersuchungen über magische Rechtecke und Parallelepipeda nunmehr auch auf den Raum von mehr als drei Dimensionen aus. (Vgl. F. d. M. XII. 1881. 145, 146.) Sn.

— —

Beweise weiterer Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Zahlentheorie von MORET-BLANC, LIONNET, S. MARKS, T. MUIR, H. L. ORCHARD, E. RUTTER, G. HEPPEL, G. EASTWOOD, MORTH, G. F. WALKER, K. GALE, W. A. WHITWORTH, SYLVESTER, W. J. C. SHARP, C. BICKERDIKE, W. B. GROVE, B. EASTON, E. BUCK, W. W. TAYLOR finden sich Nouv. Ann. (3) I. 475-476, 476-478; Ed. Times XXXVI. 24-25, 42-43, 48, 66-67, 97-98, 117-118; XXXVII. 24-25, 27, 44, 55-56, 101-102.

## Capitel 2.

### Theorie der Formen.

POINCARÉ. Sur une extension de la notion arithmétique de genre. C. R. XCIV. 67-69, 124-127.

Die Gauss'sche Einteilung der binären quadratischen Formen nach Ordnungen und Geschlechtern, die dann von Eisenstein auf die quadratischen ternären Formen übertragen wurde, wird hier auf beliebig hohe Formen mit beliebig vielen Variabeln ausgelehnt mittels der beiden Definitionen:

„Zwei algebraisch äquivalente Formen gehören derselben Ordnung an, wenn für beide der grösste gemeinsame Teiler ihrer Coefficienten der gleiche ist, und das Nämliche auch statt hat für die Coefficienten ihrer sämtlichen invariantiven Bildungen, gleichgültig ob alle diese Formen mit oder ohne Polynomial-coefficienten geschrieben werden.“

„Zwei solche Formen gehören demselben Geschlecht an, wenn sie „nach irgend einem Modul äquivalent“ sind, d. h. wenn es eine ganzzahlige lineare Substitution der Variabeln giebt, deren Determinante in Bezug auf jenen Modul congruent Eins ist, und welche beide Formen, abgesehen von jenem Modul in einander überführt“. Als erstes Ordnungs-Beispiel dienen die quadratischen Formen mit  $n$  Variabeln. Es werden drei „Ordnungs-character“ aufgestellt, die sich alle auf die Determinante  $A$  der Form stützen, von denen z. B. der erste aus den grössten gemeinsamen Teilern aller Unterdeterminanten (von  $A$ ) derselben Ordnung besteht. Damit dann zwei gegebene Formen von derselben Ordnung seien, ist es notwendig und hinreichend, dass zwei der Charactere für beide Formen dieselben sind.

Zweitens werden die cubischen binären Formen in Ordnungen eingeteilt. Hier giebt es einen einzigen Ordnungscharacter, bestehend aus dem grössten gemeinsamen Teiler der Coefficienten der Form, sowie ihrer Hesse'schen, einmal mit, einmal ohne





rch

$$a_{n-1} + 2b_{n-1}\delta_n + a_n\delta_n^2$$

stellen. Dies letztere kann man auch schreiben:

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \delta_n r_n,$$

o

$$r_n = 2m_n - a_n\delta_n, \quad m_n = -b_{n-1}.$$

Man kann also  $r_n$  als Rest einer Division aufgefasst werden, bei welcher  $a_n$  der Divisor und  $\delta_n$  der Quotient ist, der ja bekannt-

lich den Wert  $\delta_n = \frac{b_{n-1} - b_n}{a_n}$  besitzt.

Darauf gründet sich ein von numerischen Ausrechnungen bereiteter Algorithmus, der hier eine ähnliche Rolle spielt, wie die Kettendivision bei den linearen diophantischen Gleichungen.

My.

1. WEBER. Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Klein Ann XX. 301-330.

Wie der Herr Verfasser einleitend bemerkt, hat Dirichlet seine Methoden zum Beweise des Satzes, dass jede arithmetische Reihe unendlich viele Primzahlen enthält, auf quadratische Formen mit regulärer negativer Determinante angewandt. Hier werden nun jene Methoden auf quadratische Formen ohne jede Einschränkung ausgedehnt und der Beweis in übersichtlichem Zusammenhange vollständig dargestellt. Die  $h$  Classen von eigentlich primitiven quadratischen Formen einer bestimmten nicht quadratischen Determinante  $D$  werden, im Hinblick auf die von Gauss gegebenen Gesetze der Composition, als Elemente einer abelschen Gruppe vom Grade  $h$  betrachtet; die Hülfsätze über Gruppen (und Charaktere) finden sich in einem besonderen, vorgeschickten Paragraphen. Den „Kern des Beweises“ bildet, wie in den entsprechenden Untersuchungen Dirichlet's, nur dass gerade an diesem Punkt früher nie völlig erledigt wurde, der Nachweis, dass gewisse Reihen für ein gegebenes Argument einen bestimmten Grenzwert haben sollen; speciell, es sollen die Summen:

$$\sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-1-e} = \frac{g}{\varrho},$$

$$\sum \frac{l(ax^2 + 2bxy + cy^2)}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+e}} = \frac{g}{\varrho^2}$$

für  $\varrho = 0$  und irgend ein endliches  $g$  endliche Grenzwerte haben. Falls  $b^2 - ac$  negativ ist, müssen  $x, y$  alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Wertcombination  $0, 0$  durchlaufen, während für ein positives  $b^2 - ac$  die Variabeln  $x, y$  alle ganzzahligen Werte annehmen, welche den Bedingungen genügen:

$$y \geq 0, \quad x > \gamma y,$$

wo  $\gamma > \beta > \alpha$ , wenn  $\alpha, \beta$  die reellen Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

sind;  $a > 0$ . Die Erledigung dieses Hauptpunktes geschieht durch Anwendung von zweifach unendlichen Thetareihen, gemäss einer Angabe des Herrn Dedekind; und zwar fand sich die anzuwendende Formel für den Fall negativer Determinanten bereits bei Rosenhain, während für positive eine analoge erst noch zu entwickeln war. In einem Schlussparagraphen werden die Formen zweiter Art und die quadratischen Determinanten einfach erledigt.

Sn.

TH. PEPIN. Sur la classification des formes quadratiques binaires. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIII. 1881. 354-391.

Beziehungen der Classenzahl für eigentlich primitive und derivirte Formen. Lehrsätze über irreguläre Determinanten; z. B.: ist  $D$  eine solche, und ist  $p$  ihr Irregularitätsexponent, so ist auch  $Dm^2$  irregulär und der Irregularitätsexponent durch  $p$  theilbar. Der Herr Verfasser erledigt einen Zweifel von Gauss, (D. A. art. 306. VIII.), ob es Determinanten unter  $-10000$  gebe, deren Irregularitätsexponent grösser als 3 sei, durch den Nachweis, es habe  $-6075 = -243 \cdot 25$  den Irregularitätsexponenten 9. Auch giebt er Methoden, um Determinanten mit vorgeschriebenen Irregularitätsexponenten zu bilden.

Sn.

**BERGER.** Sur une application des nombres des classes des formes quadratiques binaires pour un déterminant négatif. Upsala, Berling.

Der Verfasser legt seiner Untersuchung den Ausdruck

$$S_m = \sum_{k=1}^{k=p} U_{m+4(k-1)p}$$

Grunde, wo  $U_n = (-1)^{[V^n]}$  ist (unter  $[x]$  die grösste in  $x$  haltene ganze Zahl verstanden), dem er nach mannigfaltigen Umformungen die Gestalt giebt:

$$S_m = -\frac{1}{2} - \frac{p}{2}(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 2\left[\frac{m}{4p} - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}\right] + 4 \sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} \left\{ \left[\frac{m}{4p} - \frac{k^2}{p}\right] - \left[\frac{m}{4p} - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4} - \frac{k^2}{p}\right] \right\}.$$

ist eine positive, ungrade Primzahl.

Hier wird die Grösse  $\frac{k^2}{p}$  gemäss der Gleichung umgewandelt:

$$\frac{k^2}{p} = \left[\frac{k^2}{p}\right] + \frac{r_k}{p},$$

$$k^2 \equiv r_k \pmod{p}.$$

Führt man noch das Legendre'sche Symbol  $\left(\frac{k}{p}\right)$  ein, so gelangt man zu der bemerkenswerten, mit dem Ausdruck für  $S_m$  zu combinirenden Hülfs Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} \left\{ \left[\frac{\beta - r_k}{p}\right] - \left[\frac{\alpha - r_k}{p}\right] \right\} = \frac{[\beta] - [\alpha]}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k \leq \beta \\ k > \alpha}} \left(\frac{k}{p}\right),$$

$$0 \leq \alpha < \beta < p.$$

werden vier Fälle unterschieden:

$$\begin{array}{lll} p \equiv 1 \pmod{4} & \text{I. } 0 \leq m < p, & \text{II. } p \leq m \leq 4p-1, \\ p \equiv 3 \pmod{4} & \text{III. } 0 \leq m < 3p, & \text{IV. } 3p \leq m \leq 4p-1. \end{array}$$

Für den ersten z. B. erhält dann  $S_m$  die elegante Darstellung

$$S_m = +1 + 2 \sum_{\substack{k \leq \frac{m}{4} \\ k \equiv \frac{m-p}{4}}} \left( \frac{k}{p} \right).$$

und ähnlich in den drei anderen Fällen.

Die Grössen  $S$  lassen sich nun ganz und linear durch  $K_1$  und  $K_2$  ausdrücken, d. h. durch die Classenzahlen der quadratischen primitiven Formen erster Art von der Determinante  $-p$ , resp.  $-2p$ . So z. B. erhält man für  $p \equiv 1 \pmod{8}$

$$S_0 = 1 + K_1, \quad S_p = -1 + K_1, \quad S_{2p} = -1 - K_1, \quad S_{3p} = -1 - K_1,$$

$$S_{\frac{p-1}{2}} = 1 + K_1 + K_2, \quad S_{\frac{3p-1}{2}} = -1 - K_1, \quad S_{\frac{5p-1}{2}} = -1 + K_1 + K_2,$$

$$S_{\frac{7p-1}{2}} = -1 - K_1.$$

Diese Formeln gestatten folgende Anwendung:

Bezeichnet man mit  $Q(x)$  die grösste ganze in  $x$  enthaltene Quadratzahl, so lässt sich der ursprüngliche Wert für  $S_m$  leicht auch so schreiben:

$$S_m = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{Q[4(K-1)p+m]}.$$

Dann ist z. B. in den eben angeführten Formeln folgender Satz enthalten:

„Unter den  $p$  Quadratzahlen

$$Q(0) \quad Q(4p) \quad Q(8p) \dots Q[4(p-1)p]$$

gibt es

$$\frac{p+1+K_1}{2}, \quad \frac{p+1}{2}, \quad \frac{p+1+K_1}{2}, \quad \frac{p+1-2K_1}{2}$$

grade Zahlen, je nachdem

$$p \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8}.$$

Aus der Eigenschaft von  $K_1$  und  $K_2$ , wesentlich positiv zu sein, erhalten diese Sätze noch nähere Bestimmungen, deren rein arithmetischer Beweis schwer sein dürfte.

Zum Schluss folgt noch eine Tabelle mit den Zahlen  $K_1, K_2$  für Primzahlen unter 100.

My.

L. CHARVE. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. Ann. d. l'Éc. Norm. (2) XI. 119-135.

Es wird auf diese Formen die Methode ausgedehnt, die Killing für die Reduction der ternären positiven Formen aufgestellt hat.

Durch eine ganzzahlige Substitution von der Determinante  $\pm 1$  überführe die gegebene Form  $f$  über in eine äquivalente  $F$ . Man führe dann in  $f$  eine fünfte Variable  $u$  ein, indem man  $x, y, z, t$  ersetzt durch  $x-u, y-u, z-u, t-u$  und analog in  $F$  die neuen Variabeln  $X, Y, Z, T$  durch  $X-U, Y-U, Z-U, T-U$ . So gelangt man zu zwei Formen  $\varphi, \Phi$ , die man so schreiben kann, dass sie sich aus den (zehn) Quadraten der Differenzen der fünf Variabeln linear zusammensetzen, und die für  $u = 0$ , resp.  $U = 0$  wieder rückwärts in  $f$ , resp.  $F$  übergehen. Die Substitution, die  $\varphi$  in  $\Phi$  überführt, ist leicht angebbar: ist ihre Determinante gleich  $\pm 1$ , so sind  $\varphi$  und  $\Phi$  äquivalent.

Die Aufgabe ist nun, diese neue Form  $\varphi$  mit fünf Variabeln auf ihre reducirte Form zu bringen. Nennt man die Coefficienten succ.  $a, b, c, \dots, l$ , so heisst die Form eine reducirte, wenn irgend eine der drei (gleichwertigen) Bedingungen erfüllt ist:

- 1) Alle Coefficienten sind positiv;
- 2)  $a$  ist allein negativ und dem absoluten Werte nach kleiner, als  $b, c, d, e, f, g$ ;
- 3)  $a$  und  $h$  sind allein negativ: daher ist  $a$ , absolut genommen, kleiner als  $b, c, d, e, f, g$ ; und  $h$  absolut kleiner als  $b, c, e, f, k, l$ ; endlich ist noch der absolute Wert von  $a+h$  kleiner als  $b, c, e, f$ .

Es giebt immer nur eine zu  $\varphi$  äquivalente Form, die eine dieser Bedingungen und damit alle erfüllt. (Dabei sind aber die zwischen den Variabeln möglichen Permutationen ausser Acht gelassen.) Die erforderliche Substitution setzt sich aus folgenden drei einfachen Substitutionen zusammen:

$$\begin{aligned}
 x &= T - Z, & x &= Y - X, \\
 y &= X - U, & y &= U - T, \\
 z &= Y - U, & z &= U - Z, \\
 t &= T - U, & t &= Y - T, \\
 u &= 0, & u &= 0.
 \end{aligned}$$

My.

E. W. SYMONS, J. O'REGAN, R. TUCKER, A. MARTIN. Solutions of a question (6688). Ed. Times XXXVI. 56.

Sind  $a, b, c$  drei solche Grössen, dass die Summe zwei immer grösser als die dritte ist, und sind  $x, y, z$  drei Grössen deren Summe positiv ist, so ist  $x, y, z$  negativ, wenn

$$a^2x^{-1} + b^2y^{-1} + c^2z^{-1} = 0.$$

0.

### Capitel 3.

### K e t t e n b r ü c h e.

## Vierter Abschnitt.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

**E. B. MARSANO.** Sul numero delle combinazioni a tre a tre dei successivi intieri  $1, 2, 3, \dots, B$ , aventi ciascuna una somma non maggiore di  $C$ . Altra nota. Batt. G. XX. 249-269.

Die vorbergehende Note, auf welche die gegenwärtige Bezug nimmt, ist zu finden l. c. XIX. 156. (s. F. d. M. XIII. 1881. 150.). Die daselbst gestellte und gelöste Aufgabe nahm die Anzahl der aus der Reihe  $1, 2, \dots, B$  gewählten Elemente beliebig. Sie wird jetzt auf 3 beschränkt, und die Aufgabe direct durch Discussion gelöst. Es ergibt sich eine Tabelle über die Bestandteile der gesuchten Zahl, welche viele Fälle unterscheidet.

H.

**J. BOURGET.** Sur les permutations de  $n$  objets et sur leur classement. C. R. XCV. 508-511.

Der Verfasser stellt folgendes neue Successionsgesetz der Permutirung von  $n$  Elementen  $1, 2, 3, \dots, n$  auf. Man permutire cyklisch  $n-1, n$ ; jedes der zwei Glieder des Cyklus stelle man hinter  $n-2$  und permutire die drei Elemente cyklisch; jedes der sechs Glieder dieses Cyklus stelle man hinter  $n-3$  und permutire die vier Elemente cyklisch, u. s. w. Die schliessliche cyklische





so cyklische Permutationen von einander, soweit sie irgend ein Element gemein haben. In manchen Columnen zerfällt der Zyklus in mehrere Teilcyklen. In jeder Columnne, von der Wie- derkehr an nach oben gelesen, zeigt das  $k^{\text{te}}$  Element, welches  $h^{\text{te}}$  Element, an, dass das erste Element in der  $k^{\text{ten}}$  Reihe die  $h^{\text{te}}$  Stelle einnimmt. Es wird untersucht, in welchem Falle ein Element ständig seine Stelle behält; hier muss  $n = 3p - 1$  sein. Ferner der Fall, wo zwei Elemente wechseln. Ferner das Minimum der Periodenlänge. Die Längen der einzelnen Cyklen sind Teiler des Zyklus, welcher das Element 1 enthält. Ein unveränderliches Element ist zweimal soviel Elemente hinter sich als vor sich. H.

ANAT. Ueber Permutationen der Zahlen des dekadi- schen Systemes. Pr. Drohobycz. Galizien. (Polnisch). I. Teil.

Es sei

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \\ + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \dots + b_m \cdot 10^{-m};$$

und  $m$  beliebige ganze Zahlen,  $a$  und  $b$  ganze Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, 3, ..., 9. Permutirt man auf verschiedene Weisen die Coefficienten  $a$  und  $b$ , so erhält man verschiedene Zahlen  $P$ . Berechnung der Anzahl aller Zahlen, die nach 2, 3, ...,  $\mu$ -maliger Vertauschung der Ziffern entstehen, und Bestimmung der Differenz zwischen der gegebenen und jeder der neu entstandenen Zahlen ist das Ziel dieser Arbeit. Dn.

J. HEPPEL. Solution of two questions (6502, 6589). Ed. Times XXXVI. 57-62.

In

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

stellen die Buchstaben 16 Zahlen einer arithmetischen Reihen dar, welche die Summe des Anfangs- und Endgliedes  $s$  ist. Sie

sind so geordnet, dass  $2s$  die Summe von jeder der 24 Gruppen  $abcd, \dots aeim, \dots afkq, \dots$  etc. ist. Es wird die Anzahl der Gruppierungen bestimmt, die diesen Bedingungen genügen.

O.

C. F. MALMSTEN. Generalisering af det s. k. „Femtonspelet“ (Boss Puzzle'spel). Göteborg. Handl. 1882. 75-105.

Der Verfasser behandelt hier mathematisch eine Verallgemeinerung des bekannten „Fünfzehn-Spiels“, welche man erhält, wenn man mit  $n^2 - 1$  statt mit 15 Zahlen operirt; er zerteilt die möglichen Fälle in zwei Classen, „0-Gruppen“ und „1-Gruppen“, und zeigt, dass eine Gruppe der ersten Classe nimeals in eine der zweiten transformirt, dass aber eine beliebige Gruppe immer in eine beliebige Gruppe derselben Classe verwandelt werden kann, und dass es also in jedem Falle möglich sei, anzugeben, ob eine Lösung des Spiels zu finden oder nicht zu finden ist. Schliesslich deutet der Verfasser an, dass eine noch weitere Verallgemeinerung möglich sei, indem seine Sätze auch für  $n \cdot m - 1$  Zahlen gelten.

E.

H. M. TAYLOR und R. C. ROWE. Note on a geometrical theorem. Lond. M. S., Proc. XIII. 102-106.

Die Arbeit ist eine Erweiterung der von Euler, J. A. de Segner, Lamé, O. Rodrigues, M. J. Binet und E. Catalan behandelten Aufgabe: Auf wie viele Arten lässt sich ein Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreiecke zerlegen? Vorausgehen historische und literarische Notizen. Die Lösung des Urproblems lautet:

$$P_n = \frac{(2n)!}{n! (n+1)!},$$

wo  $n+2$  die Seitenzahl,  $P_n$  die gesuchte Zahl ist. Der Verfasser setzt nun statt der Dreiecke allgemein  $p$ -Ecke und fragt nach der Anzahl  $P_n$  der Zerlegungen des  $[(p-2)n+2]$ -Ecks in

Linien durch Diagonalen, die sich nicht schneiden. Er findet die Relation

$$P_n = \sum P_a P_b P_c \dots,$$

wo  $a, b, c, \dots$  die möglichen ganzen Zahlen einschliesslich 0, für welche

$$a + b + c + \dots = n - 1,$$

und deren Anzahl stets  $= p - 1$  ist, bedeuten. Setzt man nun

$$f(x) = 1 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots,$$

so findet man bei obiger Relation:

$$f(x) = 1 + x f(x)^{p-1}.$$

Entwickelt man  $f$  in die Lagrange'sche Reihe nach Potenzen von  $x$ , so ergibt die Coefficientenvergleichung:

$$P_n = \frac{[(p-1)n]!}{n! [(p-2)n+1]!}$$

als Lösung der allgemeinen Aufgabe.

H.

LAISANT. Remarques sur la théorie des régions et des aspects. S. M. F. Bull. X. 52-55.

Zieht man durch je zwei unter  $n$  beliebigen Punkten in der Ebene unbegrenzte Gerade, so wird die Ebene in  $\varrho$  Regionen geteilt. Unter diesen sind

$$\varrho_1 = \frac{1}{8} (n-1) (n-2) (n^2 - 3n + 4)$$

begrenzt, und

$$\varrho_2 = n(n-1)$$

nicht begrenzt. Von allen Punkten einer Region gesehen erscheinen die  $n$  Punkte in derselben Reihenfolge. Daher ist  $\varrho$  eine obere Grenze der möglichen verschiedenen Aspekte. Die Zahl der Aspekte hängt nicht bloss von  $n$ , sondern auch von der Lage der  $n$  Punkte ab. Ihre Bestimmung ist eine schwierige Aufgabe, die hier nicht in Angriff genommen wird.

H.



m, wie der Verfasser in dem Vorwort hervorhebt „das Verständnis zu erleichtern und möglichen Bedenken vorzubeugen.“ Die Anwendungsbeispiele sind zum Teil verändert. Ls.

. BERTRAND. Sur la théorie des épreuves répétées.  
C. R. XCIV. 185-186.

Der Verfasser giebt folgende Ableitung des Bernoulli'schen Satzes. Es seien  $p$  und  $q$  die Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse, von denen das Eine oder das Andere eintreffen muss; mithin giebt die Entwicklung des Binoms

$$(p+q)^n = \sum A_k p^k q^{n-k}$$

die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Combinationen, welchen die beiden Ereignisse bei  $\mu$  Versuchen auftreten können. Es wird angenommen, dass Jemand sich verpflichtet be, nach  $\mu$  Versuchen die Summe  $\left(\frac{n}{\mu} - p\right)^2$  zu bezahlen, wo  $n$  die Anzahl der Fälle bezeichnet, in denen das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit  $p$  ist, aufgetreten.

Die mathematische Hoffnung  $E$  desjenigen, dem das Verrechnen gemacht worden, ist augenscheinlich gleich

$$\begin{aligned} & \sum \left(\frac{k}{\mu} - p\right)^2 A_k p^k q^{n-k} \\ &= \frac{1}{\mu^2} \sum k^2 A_k p^k q^{n-k} - \frac{2p}{\mu} \sum k A_k p^k q^{n-k} + p^2 \sum A_k p^k q^{n-k}; \end{aligned}$$

und da, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned} \sum A_k p^k q^{n-k} &= 1, \\ \sum k A_k p^k q^{n-k} &= \mu p, \\ \sum k^2 A_k p^k q^{n-k} &= \mu p + \mu(n-1)p^2, \end{aligned}$$

ergiebt sich

$$E = p \frac{(1-p)}{\mu} + \frac{pq}{\mu}.$$

mit wachsendem  $\mu$  convergirt also  $E$  gegen 0, und folglich muss auch  $\left(\frac{n}{\mu} - p\right)$  mit wachsendem  $\mu$  gegen 0 convergiren.

Ls.

EM. BARBIER. Deux moyens d'avoir  $\pi$  au jeu de pile ou face. C. R. XCIV. 1461-1463.

Werden  $2n$  Münzen geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $n$  Münzen auf die Bildseite,  $n$  Münzen auf die Schriftseite fallen:

$$P = \frac{2n \cdot 2n-1 \dots n+1}{n! \cdot 2^{2n}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n},$$

und mithin unter Anwendung der Formel von Wallis

$$P \text{ näherungsweise} = \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

1. Werden mit den  $2n$  Münzen unendlich viele Würfe gemacht, und nennt man die durchschnittliche Anzahl der Würfe, unter denen einer ist, bei welchem  $n$  Münzen auf die Bildseite,  $n$  Münzen auf die Schriftseite fallen,  $M$ , so folgt

$$M = \frac{1}{P}, \text{ also } \frac{M^2}{n} = \pi.$$

2. Entwickelt man für eine unendliche Zahl von Würfeln die Differenz der Münzen, welche Schrift und Bild zeigen, wobei die Differenz stets positiv genommen wird, wenn sie nicht gleich Null ist, und nennt man den Mittelwert dieser Differenz  $D$ , so ergibt sich

$$D = 2nP, \text{ also } \frac{4n}{D^2} = \pi.$$

Die Werte  $\frac{M^2}{n}$  und  $\frac{4n}{D^2}$  geben auch bei einer endlichen Anzahl von Versuchen Näherungen für  $\pi$ . Ls.

Weitere Lösungen von Aufgaben über Wahrscheinlichkeit von SEITZ, MATZ, B. EASTON, D. MCALISTER, MCFARLANE, S. TEBAY, CH. LADD, W. A. WHITWORTH, J. O'REGAN, W. H. BLYTHE, G. HEPPEL, E. BLACKWOOD, K. GALE finden sich Ed. Times XXXVI. 50, 53, 94-96; XXXVII. 40-42, 52, 67, 68, 71, 121-122.

O.

**L. VOGLER.** Grundzüge der Ausgleichungsrechnung.

Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Das Buch ist wesentlich für praktische Geometer bestimmt und behandelt die Vorschriften der Ausgleichungsrechnung mit einer dem genannten Zwecke entsprechenden Vollständigkeit und Ausführlichkeit unter Einfügung zahlreicher Beispiele. Da der Inhalt materiell nichts Neues giebt, so sei hier nur erwähnt, dass die Darstellung mit ganz elementaren Hilfsmitteln operirt und wohl geeignet ist, solche Leser in die Methode der kleinsten Quadrate einzuführen, denen es wesentlich nur auf die praktische Anwendung, jedoch nicht auf eine vollkommen strenge Begründung der Principien ankommt. B.

**P. VAN GEER.** Over het gebruik van determinanten by de methode der kleinste kwadraten. Nieuw Arch. IX. 180-188.

Eine frühere Arbeit des Verfassers über die Anwendung der Determinanten bei der Methode der kleinsten Quadrate (s. F. d. M. VII. 1875. 114) und eine Arbeit Glaisher's in den Monthly Notices of the R. Astron. Society (F. d. M. XIII. 1881. 162) haben die Veranlassung zu der vorliegenden Note gegeben, welche dieselbe Aufgabe behandelt. Einige der in diesen Arbeiten erhaltenen Resultate und Eigenschaften sind bereits in einer Abhandlung von Jacobi: De formatione et proprietatibus determinantium (Crelle J. Bd. XXII. p. 285) mitgeteilt. G.

**Th. WITTSTEIN.** Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Astr. Nachr. 2446.

Wenn  $y$  eine gegebene nicht lineare Function der gesuchten Unbekannten,  $M$  den beobachteten Wert von  $y$ , und  $p$  sein Gewicht bedeutet, so verlangt die gewöhnliche Rechnungsvorschrift die Einführung genäherter Werte für die Unbekannten, um den Fehlergleichungen die lineare Form geben zu können. Diese Substitution lässt sich, wie gezeigt wird, umgehen, sobald eine





so  $k$  eine willkürliche und für alle Beobachtungen identische positive Constante bedeutet.

Der Beweis gründet sich darauf, dass man an die Stelle des Verhältnisses der kleinen Differenzen  $f(y) - f(M)$  und  $y - M$  das Verhältniss ihrer Differentiale setzen darf.

Schliesslich zeigt der Verfasser die Anwendung seines Verfahrens an einigen Beispielen. Ls.

J. A. MAGGI. Intorno ad alcune formole relative al calcolo degli errori d'osservazione. Lomb. Rend. (2) XV. 351-358.

Der Verfasser giebt die Ableitung für die Berechnung der wahrscheinlichsten Werte eines Systems von Unbekannten, welche in linearer Form in einer Function auftreten, wenn Werte dieser Function durch überzählige Beobachtungen gegeben sind. Durch Einführung des Präcisions-Modulus und des mittleren Beobachtungsfehlers wird gezeigt, welchen Gesetzen die Fehler dieser wahrscheinlichsten Werte unterworfen sind, und endlich wird der mittlere Beobachtungsfehler aus den Resultaten der Beobachtung bestimmt. Ls.

P. HARZER. Ueber die Wahrscheinlichkeit, einen Cometen aufzufinden als Function seines geometrischen Winkelabstandes von der Sonne. Astr. Nachr. 2453.

Die genannte Aufgabe ist in dem Briefwechsel zwischen Bessel und Olbers behandelt, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Helligkeit des Cometen umgekehrt proportional den Quadraten seiner Abstände von Sonne und Erde ist. Verfasser zeigt, dass das von Olbers gefundene Resultat nicht correct ist, und leitet unter gewissen, praktisch zulässigen Vereinfachungen für die Wahrscheinlichkeit, dass der Comet in dem Winkelabstande  $\pi - \varphi$  von der Sonne entdeckt werde, den angenäherten Ausdruck

$$C \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

ab, wo  $C$  eine Constante ist, deren Wert von dem Flächeninhalt der Himmelskugel abhängt, das man, als bei vorliegender Aufgabe auszuschliessen, um die Sonne abzugrenzen hat.

B.

T. W. WRIGHT. On the computation of probable error  
Anal. IX. 74-78.

Tafeln für die Werte der Multiplicationsconstanten in Bessel und Peters' Formeln für den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung und des arithmetischen Mitteln von  $m$  Beobachtungen. Schreibt man

$$r = \frac{0,6745}{\sqrt{m-1}} \sqrt{[\nu^2]} = \lambda_1 \sqrt{[\nu^2]}, \quad r_0 = \frac{0,6745}{\sqrt{m(m-1)}} \sqrt{[\nu^2]} = \lambda_2 \sqrt{[\nu^2]}$$

$$r = \frac{0,8453}{\sqrt{m(m-1)}} [\nu] = \lambda' [\nu], \quad r_0 = \frac{0,8453}{m\sqrt{m-1}} [\nu] = \lambda'' [\nu],$$

so geben die Tafeln die Werte von  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda'$  und  $\lambda''$  für  $m=$  bis  $m=100$  auf vier Decimalstellen. Jn. (O.).

E. L. DE FOREST. On an unsymmetrical probability curve  
Anal. IX. 135-141, 161-168.

Der Verfasser sucht zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit curve von der Form

$$y = \frac{a dx}{\Gamma(a^2 b)} (a x)^{a^2 b - 1} e^{-a x}$$

sei, wo  $a$  und  $b$  constant sind.

Jn. (O.).

E. L. DE FOREST. Law of error in the position of a point in space. Anal. IX. 33-40, 65-74.

Der Verfasser sucht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz aufzustellen, ohne die Annahme, dass der Fehler in einer Richtung unabhängig ist von dem Fehler in einer anderen zur ersten senkrechten Richtung.

Jn. (O.).

re Lösungen von Aufgaben über mittlere Werte

W. J. C. SHARP, J. L. KITCHIN, C. MORGAN, LASTON, H. G. DAY, S. TEBAY, T. R. TERRY, K. GALE, RIZ, D. EDWARDES, MATZ finden sich Ed. Times XXXVI. 47, 52, 53, 53, 71-72, 84; XXXVII. 42-44, 109-111, 120.

O.

AXIMOWITSCH. Interpolation der impliciten Functionen und die Berechnung der Wurzeln. Kazan Ber. 1882. (Russisch).

wird hier zur Interpolation der Function  $x$  von  $y$ , die die Gleichung

$$y = f(x)$$

ist, die bekannte Interpolationsformel von Newton für die Zwischenräume angewendet unter der Voraussetzung, der Wert von  $x$  zwischen solchen von seinen Werten  $a$  und  $b$  zwischen welchen die Gleichung  $f'(x) = 0$  keine Wurzeln ann wird eine Regel zur Beurteilung der Genauigkeit dieser gegeben, gestützt auf ein Lemma über Newton's Interpolationsformel, die nur im letzten § III. bewiesen wird; ferner das Restglied dieser Formel gefunden und zuletzt gezeigt, dem Falle, wo die zur Interpolation gebrauchten Werte sich unendlich nahe rücken, diese Formel in die von Lagrange'schem Restgliede übergeht. Im § II werden in beiden erwähnten Formeln zwei andere, zur Berechnung der Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  dienende Formeln gewonnen, von denen die zweite die von Euler in seiner Differentialrechnung d. II. Cap. 9 § 234 gegebene ist, nur dass sie jetzt mit dem Restgliede erscheint.

Ty.

WOODWARD. On the actual and probable values of interpolated values derived from numerical tables by means of first differences. Anal. IX. 143-149, 169-175.

Der Verfasser betrachtet vorzugsweise interpolirte Werte, in



Es giebt für jeden Lohnsatz einen Gleichgewichtszustand für das Verhältnis des Arbeiters zum Capitalisten, und somit würde die Frage nach der Höhe der Löhne unbestimmt bleiben, wenn zu der Gleichgewichtsbedingung nicht noch eine fernere Bedingung hinzukäme. Diese ergibt sich aus der Tatsache, dass für die Erzeugung einer bestimmten Quantität von Producten Capital und Arbeit in verschiedener Weise mit einander combinirt werden können, und dass diejenige Combination gewählt werden wird, welche die vorteilhafteste ist; diese Combination ist wieder vom Lohnsatz abhängig.

Der Zweck des Verfassers gipfelt darin, zu zeigen, dass bei freier Concurrenz zwischen Capitalisten und Arbeitern der Lohnsatz die höchste Höhe erreichen muss, welche mit Notwendigkeit aus den vorhandenen socialen Beziehungen hervorgeht.

LS.

A. MORGENBESSER. Die mathematischen Grundlagen des gesamten Versicherungswesens. Berlin. Puttkammer und Mühlbrecht.

Das Buch erfüllt keineswegs das, was der Titel desselben verspricht, denn es enthält nur eine Zusammenstellung der am häufigsten vorkommenden Formeln für die Berechnung der Lebensversicherungs-Prämien, deren Gebrauch, wie der Verfasser in dem Vorwort selbst sagt, es dem Lebensversicherungsbeamten möglich macht „ohne zeitraubendes Nachschlagen in voluminösen Büchern und weiteres Eingehen in die Theorie der betreffenden Versicherung die Höhe des fraglichen Betrages sofort zu ermitteln“.

Ob für eine solche „Zusammenstellung“ ein Bedürfnis vorhanden ist, vermögen wir nicht zu beurteilen. Neues haben wir in dem Buche nicht gefunden. Zu loben ist es indes, dass der Verfasser die von den Lebensversicherungstechnikern im Jahre 1864 vorgeschlagene Bezeichnungsweise adoptirt hat.

LS.



. Näherungsmethoden. Die Bestimmung des wirklich gezahlten ~~ausfusses~~ <sup>Einflusses</sup>, wenn das zurückgezahlte Capital von dem Betrag des ~~angeschossenen~~ <sup>erschossenen</sup> verschieden ist. V. Praktische Beispiele und ~~Er-~~ <sup>Er-</sup> ~~nterungen.~~ <sup>nterungen.</sup> VI. Die Anwendung der höheren Analysis auf die ~~heorie~~ <sup>Theorie</sup> der Zinseszinsen. VII. Ueber Zinsentabellen.

Fast gleichzeitig mit dem Textbook ist die Arbeit von King erschienen. Dieselbe bezeichnet sich als eine kurze Abhandlung über ~~die~~ <sup>die</sup> Lehre von den Zinsen und den unbedingten Renten und bildet ~~die~~ <sup>die</sup> No. 8 der neuen Reihenfolge der Transactions of the Actuarial Society of Edinburgh. Das Buch ist hervorgegangen aus den ~~Vorlesungen~~ <sup>Vorlesungen</sup>, welche von dem Verfasser zur Vorbereitung auf ~~das~~ <sup>das</sup> Mittelexamen bei dem Institute of Actuaries gehalten werden. ~~Diese~~ <sup>Diese</sup> Vorlesungen umfassen auch die mathematische Theorie ~~der~~ <sup>der</sup> Lebens-Versicherungsrechnung, und der Verfasser hatte ~~ursprünglich~~ <sup>ursprünglich</sup> die Absicht gehabt, das ganze Gebiet dieser ~~Vor-~~ <sup>Vor-</sup> ~~lesungen~~ <sup>lesungen</sup> unter dem Titel Elements of Actuarial Science zu ~~be-~~ <sup>be-</sup> ~~handeln.~~ <sup>handeln.</sup> Dieser Plan ist jedoch aufgegeben, denn nachdem der ~~erste~~ <sup>erste</sup> Teil des Textbooks veröffentlicht worden, hat Herr Sutton ~~dem~~ <sup>dem</sup> Institute of Actuaries erklärt, seine anderweitigen Beschäftigungen liessen ihm nicht die erforderliche Zeit für die Bearbeitung des zweiten Theils, und in Folge dessen hat das Institute ~~diese~~ <sup>diese</sup> Arbeit dem Herrn King übertragen.

Die Theory of Finance unterscheidet sich von dem Textbook in der Hauptsache nur dadurch, dass es den behandelten ~~gegenstand~~ <sup>Gegenstand</sup> etwas enger begrenzt hat; es umfasst 92 Seiten Text und 5 Seiten Tabellen.

Wir dürfen beide Bücher auf das Wärmste empfehlen.

Is.

. F. HARDY. An improved method of approximating to the value of annuities involving three lives. J. Inst. Act. XXIII. 274-285.

Das gewöhnliche Verfahren zur näherungsweise Berechnung ~~s~~ <sup>des</sup> Leibrentenwertes für drei verbundene Personen  $R(x, y, z)$ , wo  $y, z$  die Alter sind, und zwar  $x$  das jüngste, besteht bekanntlich





Es ergibt sich leicht

$$x \text{ näherungsweise gleich } \frac{lm}{p} \left(1 + \frac{p}{2}\right).$$

Setzt man  $m = 2$ , so wird  $lm = 0,6931$ , und man findet die Zeit, welche erforderlich ist, damit sich ein Capital bei dem Zinsfuß  $p$  verdoppelt:

$$\frac{0,6931}{p} \left(1 + \frac{p}{2}\right).$$

Wird  $p$  gleich 2, so wird die vorstehende Formel  $\frac{70}{2}$ , und man erkennt leicht, dass man bei jeder Steigerung des Zinsfußes um drei Procent die Zahl 70 um eine Einheit erhöhen muss, um dann durch Division mit der Zahl, welche den Zinsfuß in Procenten ausdrückt, die Anzahl der Jahre zu finden, die erforderlich ist, damit sich das Capital verdoppelt. Ebenso findet man die Zeit, welche dazu erforderlich ist, damit das Capital 1 sich erhöht auf

$$\begin{aligned} 1\frac{3}{4} & \text{ gleich } \frac{0,56}{p}, \\ 1\frac{1}{2} & \text{ „ } \frac{0,40}{p}, \\ 1\frac{1}{4} & \text{ „ } \frac{0,23}{p}. \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser vier Zahlen ist es aber leicht, die Aufgaben der Zinseszinsrechnung zu lösen, wie der Autor an zahlreichen Beispielen zeigt. Ls.

J. F. HARDY. On the rate of interest in annuities certain. J. Inst. Act. XXIII. 266-274.

Für die Berechnung des Zinsfußes einer Rente, welche eine bestimmte Reihe von Jahren gezahlt werden soll, und für welche der gegenwärtige Wert und der Betrag der Rente gegeben ist, muss man bekanntlich Näherungsformeln anwenden.

Der Verfasser giebt deren zwei neue, welche wenig Arbeit machen und sehr genaue Resultate geben.



MALMSTÉN. Zur Theorie der Leibrenten. Act. Math. -76.

Der Verfasser behandelt die Aufgabe: Wie wird der Wert der Leibrente, welche bezahlt werden soll, so lange noch  $v$  von  $n$  Personen des Alters  $x_1, x_2, \dots, x_n$  am Leben sind, ausgedrückt durch die Werte der Verbindungsrenten für  $v, v+1, \dots, n$  Personen vom gegebenen Alter  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Hierfür für die Lebensversicherungstechnik üblichen Bezeichnung bedeutet  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  den Wert der Verbindungsrente für  $n$  Personen vom Alter  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; bezeichnen wir mit

$$\Sigma R(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

die Summe der Werte aller Verbindungsrenten für die verschiedenen Combinationen von  $(v+p)$  Personen, welche aus  $n$  Personen des Alters  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gebildet werden können, so findet der Verfasser den Wert der gesuchten Leibrente, welche gezahlt werden soll, so lange noch  $v$  Personen von  $n$  Personen des Alters  $x_1, x_2, \dots, x_n$  am Leben sind, gleich

$$\sum_{p=0}^{p=n-v} \left\{ (-1)^p (v+p-1)_p \Sigma R(x_1, x_2, \dots, x_{v+p}) \right\},$$

wo  $(v+p-1)_p$  die bekannte Bezeichnung des Binomial-Coefficienten sein soll. Ls.

W. L. YLVESTER and F. FRANKLIN. On a logical problem connected with assurances on joint lives. J. Hopkins 1882. 202.

Einige Formeln der mathematisirten Logik lassen sich zur Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete des Versicherungswesens anwenden. Mi.

MEECH. System and tables of life insurance. New-Haven Conn.

Dieses Werk ist durch die Untersuchungen der Sterblichkeits-Tabellen von dreissig Lebensversicherungs-Gesellschaften der vereinigten Staaten Nordamerikas veranlasst worden. Die



Das Verhältniß sich später so weit umkehren, dass die Sterblichkeitsverhältnisse der versicherten Personen sogar unter dem Sterblichkeitsdurchschnitt der allgemeinen Bevölkerung stehen. Die Resultate werden ausserdem dargestellt, gesondert für die verschiedenen klimatischen Zonen und nach den Krankheiten, welche den Tod herbeigeführt haben.

Ueber alle diese Punkte werden ausführliche Erläuterungen gegeben, unter stetem Hinweis auf die darauf bezügliche in dem Journal des Institute of Actuaries enthaltene Literatur. Es ist darin freilich nicht viel Neues enthalten, und wir hätten gewünscht, dass der Verfasser auch den von den Seinigen abweichenden Methoden und Ansichten etwas mehr Beachtung geschenkt hätte; aber wir erkennen gern an, dass hier eine ausführliche und zusammenhängende Darstellung des ganzen Verfahrens zur Ableitung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Lebensversicherungsanstalten gegeben wird. Diesem ersten Teil sind die vollständigen Resultate der unmittelbaren Beobachtungen nach den bezeichneten Richtungen in Tabellenform angefügt.

## II. Teil: Leibrenten und Lebensversicherungen.

Ausgehend von den einfachsten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie von den Sätzen über die mathematische und die moralische Hoffnung entwickelt der Verfasser das ganze System der Lebensversicherungs-Rechnung. Aus den im ersten Teil enthaltenen unmittelbaren Beobachtungen leitet er zunächst die „Nordamerikanische Sterblichkeitstafel“ ab und zwar mit Unterscheidung der Geschlechter. Er findet dabei, dass bei der Sterblichkeitstafel für Männer nur ganz unbedeutende Ausgleichungen in den niedrigsten und höchsten Altersklassen erforderlich waren, um sie und zwar für die Alter von 10 bis 99 Jahren vollkommen mit der Makeham'schen Sterblichkeitsformel in Einklang zu bringen, wo, die Anzahl der Lebenden vom Alter  $x$

$$= ks^x q^{99-x}$$

gesetzt,

$$s = 0,9936957, \quad q = 0,9993122, \quad q = 1,099713375$$

ist.

Bei der Sterblichkeitstafel für das weibliche Geschlecht, für

















s von unendlich vielen Seiten angesehen werden können. alle, welche von der gegenseitigen Lage der Kreise ab- werden dabei angegeben, ebenso wird die Formel für die rte Wahrscheinlichkeit aufgestellt und in die Form eines iten Integrals gebracht. Dies Integral kann auch in eine che Reihe entwickelt werden. G.

NEK. Eine geometrische Anwendung der Wahr- inlichkeitsrechnung. Cas. XI. 121-123. (Böhmisch).

: kurze Aufsatz behandelt die Aufgabe, die Wahrschein- zu finden, dass zwei beliebige Punkte einer Dreiecks- vom Inhalte 1 auf derselben Seite einer durch andere liebigte Punkte gezogenen Linie liegen. Der Verfasser ierfür den Wert

$$W = \frac{11}{18}.$$

Std.

LIN, D. EDWARDES. Solutions of a question (6743). imes XXXVII. 24.

Wahrscheinlichkeit, dass der Umfang eines Dreiecks, Ecken in dem Mittelpunkte eines Kreises mit dem Radius  $r$  ei beliebigen Punkten auf diesem Kreise liegen, kleiner ist ist

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0,6285\dots$$

O.

e Lösungen von Aufgaben über geometrische Wahr- inlichkeit von MATZ, T. R. TERRY, McFARLANE, . WALKER, H. McCOLL, L. TANNER, W. J. C. ER, D. EDWARDES, B. EASTON, J. HAMMOND, SEITZ, LADD, NASH finden sich Ed. Times XXXVI. 24, 27-28, 72, 83, 101-102, 114; XXXVII. 27-28, 82-83, 85-86, 92-93, 101.

O.

# Fünfter Abschnitt.

## R e i h e n.

### Capitel 1.

#### A l l g e m e i n e s.

(1). HÖLDER. Grenzwerte von Reihen an der Convergencegrenze. Klein Ann. XX. 535-549.

Wenn die Partialsummen

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n$$

für  $\lim n = +\infty$  endliche Unbestimmtheitsgrenzen  $G_1, H_1$  besitzen, so convergirt die Potenzreihe

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$$

für alle Werte  $-1 < x < +1$ , und ihre Summe  $f(x)$  hat beim Grenzübergange  $\lim x = 1-0$  endliche Unbestimmtheitsgrenzen  $G_2, H_2$ , deren Unterschied nicht grösser sein kann als  $H_1 - G_1$ . Im Falle, dass für  $s_n$  ein Grenzwert bei  $\lim n = +\infty$  existirt, geht der Satz in einen bekannten Abel'schen über. Sind die  $s_1, s_2, s_3, \dots$  nicht endlich, so bilde man

$$\frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = s'_n.$$

Dann gilt der vorstehende Satz auch, wenn man  $s'_n$  setzt statt  $s_n$  und enthält als speciellen Fall einen Satz von Frobenius (siehe F. d. M. XII. 1880. p. 188). Ihn weiter zu verallgemeinern gestatten wenigstens die Beweise des Herrn Verfassers nicht. Da-

egen zeigt er den Satz: „Wenn  $\lim s'_n$  für  $\lim n = +\infty$  nicht existiert, so setze man

$$\frac{s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_n}{n} = s''_n$$

. . . . .

$$\frac{s^{(\gamma-1)}_1 + s^{(\gamma-1)}_2 + \cdots + s^{(\gamma-1)}_n}{n} = s^{(\gamma)}_n;$$

ist nun  $\lim_{n=\infty} s^{(\gamma)}_n = c$  (endlich), so folgt  $\lim_{x=1} f(x) = c$ .“ Der Satz gilt auch für complexe Werte der  $a_n$ .

Analoge Verallgemeinerung lässt der folgende auf Dirichlet zurückzuführende Satz zu: Es ist

$$\lim_{w=+\infty} \left\{ w \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{\nu^{1+w}} \right\} = c,$$

Wenn

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = c.$$

St.

. J. STIELTJES jr. Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen. Nieuw Arch. IX. 98-106.

In Borchardt's J. IXC. (s. F. d. M. XII. 1880. p. 188) stellt Herr G. Frobenius in der Arbeit über die Leibniz'sche Reihe den Satz auf: „Ist  $s_n$  eine von  $n$  abhängige Grösse, und nähert sich

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

bei wachsendem  $n$  einer bestimmten, endlichen Grenze, so nähert sich

$$(1-x) (s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \cdots),$$

falls  $x$  beständig zunehmend gegen 1 convergirt, derselben Grenze.“

In der vorliegenden Arbeit wird diesem Satz die folgende Erweiterung gegeben. Unter derselben Voraussetzung sollen, wenn  $u > 0$  ist, die Reihen

$$(1-x) \cdot \left[ s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1 \cdot 2} s_2 x^2 + \frac{u(u+1)(u+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s_3 x^3 + \cdots \right]$$

und

$$\frac{s_1 x + \frac{1}{2} s_2 x^2 + \frac{1}{3} s_3 x^3 + \frac{1}{4} s_4 x^4 + \dots}{l\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

nach derselben Grenze convergiren.

Der Beweis stimmt mit dem von Frobenius völlig überein. Als Beispiel wird die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

genommen unter der Voraussetzung, dass die Reihe für  $x=1$  divergirt. G.

R. MILDNER. Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze. Wien. Ber. LXXXVI. 999-1051.

Es handelt sich um die Aufgabe: aus dem gegebenen Werte einer Potenzreihe

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots \quad (|x| < a)$$

den Wert derjenigen Reihe zu ermitteln, die aus jener hervorgeht, wenn abwechselnd eine beliebige Anzahl  $k$  auf einander folgender Glieder unverändert gelassen wird, während die Vorzeichen der nächsten  $k$  Glieder umgekehrt werden, d. h. der Reihe

$$R = (A_0 + A_1 x + \dots + A_{k-1} x^{k-1}) - (A_k x^k + \dots + A_{2k-1} x^{2k-1}) + (A_{2k} x^{2k} + \dots) - \dots$$

Von der bekannten Beziehung ausgehend, dass die aus der obigen abgeleitete neue Reihe

$$A_0 + A_k x^k + A_{2k} x^{2k} + \dots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} f\left(x e^{\frac{2\pi i g}{k}}\right) \quad (|x| < a)$$

ist, leitet der Verfasser als Lösung der Aufgabe die für  $|x| < a$  gültigen Formeln ab:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} \left( i \cdot \operatorname{tg} \frac{g\pi}{k} + 1 \right) f\left(-x e^{\frac{2g\pi i}{k}}\right),$$



; nur für ungrade  $k$  gilt; und

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} \left( 1 - i \cotg \frac{2g+1}{2k} \pi \right) f \left( x e^{\frac{2g+1}{2k} \pi i} \right),$$

; für alle ganzzahligen Werte  $k$  gültig ist. Aehnliche Formeln geben sich für:

$$R' = (A_1 x + A_3 x^3 + \dots + A_k x^k) - (A_{k+1} x^{k+1} + \dots + A_{2k} x^{2k}) \\ + (A_{2k+1} x^{2k+1} + \dots) - \dots.$$

s Beispiele werden nach dieser Richtung hin die einfachsten r fundamentalen Reihen der Analysis ausführlich behandelt.

T.

MARCHAND. Note sur un développement d'une fonction en série. Nouv. Ann. (3) I. 450-458.

Es wird ausgegangen von der Beziehung

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x) dx = \int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x) dx;$$

ieselbe wird auf  $\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x) dx$  angewendet; durch nachherige Anwendung von Integrationen nach Teilen ergibt sich die Macaurin'sche und Taylor'sche Formel mit ihren Restgliedern. Ferner wird namentlich auf die Anwendbarkeit der aus obiger Beziehung sich ergebenden Folgerungen:

$$\int_{\mu_1}^{\mu} f_1(\mu_1 + \mu - x) f_2(\mu_1 + \mu - x) \dots f_p(\mu_1 + \mu - x) f_{p+1}(x) \dots f_n(x) dx \\ = \int_{\mu_1}^{\mu} f_1(x) f_2(x) \dots f_p(x) f_{p+1}(\mu_1 + \mu - x) \dots f_n(\mu_1 + \mu - x) dx$$

und

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x) dx = \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1 + \mu}{2}} F(x) dx + \int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1 + \mu}{2}} F(\mu_1 + \mu - x) dx \\ = \int_{\frac{\mu + \mu_1}{2}}^{\mu} F(x) dx + \int_{\frac{\mu - \mu_1}{2}}^{\mu} F(\mu_1 + \mu - x) dx$$

aufmerksam gemacht und beispielsweise

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \pi$$

hergeleitet.

T.

J. S. HAYES. A demonstration of Maclaurin's theorem.

Anal. IX. 12-14.

Fortsetzung der Arbeit aus Anal. VIII. p. 154. s. F. d. M. XIII. 1881. p. 174. Jn. (0).

J. M. RODRIGUES. Sobre a formula de Lagrange.

Teixeira J. IV. 121-176. (Portugiesisch).

Die Reihe von Lagrange lässt sich nach der Richtung verallgemeinern, dass man mehr als eine der Wurzeln einer vorgelegten Gleichung entwickeln kann. Der Verfasser geht von der Gleichung

$$f(x) + a\varphi(x) = 0$$

aus und zeigt, dass sich eine Function  $F(x)$  einer Wurzel dieser Gleichung entwickeln lässt mit Benutzung der Formel

$$F(x) = F(a) + \sum_i (-1)^i \frac{a^i}{1 \cdot 2 \dots i} \frac{d^{i-1}}{da^{i-1}} \left[ F'(a) \left( \frac{\varphi(a)}{f'(a)} \right)^i \right],$$

wenn  $a$  eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0, \text{ und mod. max. } \left[ a \frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)} \right] < 1$$

ist. Bei algebraischen Gleichungen

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0 = 0$$

setzt Herr Rodrigues

$$x^n + A_0 = f(x),$$

was  $n$  Werte für die Wurzel  $a$  giebt, die in die obige Reihe eintritt.

Herr Rodrigues stellt auch  $F(x)$  durch ein bestimmtes Integral dar, in welches  $a$  eintritt. Ferner leitet er aus seiner Formel

ge andere bekannte Reihenentwickelungen her und schliesst mit Entwicklung einer Reihe von Resultaten, die für algebraische ichtungen von Interesse sind. Tx. (O.).

J. STIELTJES jr. Over Lagrange's interpolatie-formule. Amst.; Versl. en Meded. XVII. 239-254.

Der Zweck dieser Untersuchung ist, den Rest der Lagrange'schen Interpolationsformel in eine einfachere Gestalt als die eines bestimmten Integrals zu bringen und auch ohne Integralrechnung ableiten, ebenso, wie dies mit dem Rest der Taylor'schen Reihe geschieht. Der Verfasser benutzt hierzu eine Erweiterung des Theorems von Rolle, und bringt die Reihe auf die Form:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p) \varphi'(x_p)} f(x_p) + \frac{\varphi(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} f^n(\xi),$$

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n),$$

in  $\xi$  einen Wert hat, welcher zwischen dem grössten und dem kleinsten Wert der Zahlen  $x, x_1, \dots, x_n$  liegt.

Hieraus werden einige Folgerungen gezogen.

G.

POINCARÉ. Sur les séries trigonométriques. C. R. XCV. 766-768.

Die Reihe  $\varphi(t) = \sum A_p \sin \alpha_p t$ , worin  $A_p, \alpha_p$  positive Zahlen bezeichnen, convergirt, falls  $\sum A_p \alpha_p$  convergirt. Nimmt man an, dass  $\frac{1}{A_p}$  und  $\alpha_p$  für  $\lim p = +\infty$  den Grenzwert 0 haben, so kann  $\varphi(t)$  dem absoluten Betrage nach jede Zahl überschreiten; eine Bemerkung, welche für die Mechanik des Himmels nicht ohne Interesse ist. St.

J. VELTMANN. Die Fourier'sche Reihe. Schlömilch Z. XXVII. 193-235.



folgen unmittelbar aus dem Riemann'schen Begriffe der baren Function.

Die allgemeinen Sätze über die Summe der Fourier'schen Reihen scheinen im Wesentlichen nichts Neues darzubieten. (Vgl. Lini, Serie di Fourier I. p. 100). Beachtenswert ist eine vom Herrn Verfasser aufgestellte specielle Fourier'sche Reihe, die convergent ist in Punkten, welche die ganze Kreislinie in unendlich kleine Teile zerlegen, während sie für andere Punkte, welche ebenfalls überall einander unendlich nahe sind, convergent ist und ihre Summe gleich ist dem Werte der Function, aus der sie abgeleitet ist. Am Schlusse der Abhandlung wird die Frage erörtert, ob eine Function  $f(\gamma)$  von den bisher gesetzten Eigenschaften auf mehr als eine Weise in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann. St.

HARNACK. Théorie de la série de Fourier. Darb. Bull. I. 242-260, 265-280, 282-300.

LEPHÉREZ. Sur la série de Fourier. C. R. XCV. 1217-1219.

Harnack hat die im vorigen Bande p. 182 angezeigte Abhandlung nach Massgabe des von ihm selbst darin gefundenen Schlusses neu redigirt. Der § I, 14 Lehrsätze enthaltend, beruhen einige von den folgenden Sätzen beruhen, ist unverändert geblieben, und bietet somit noch immer Anlass zu Berichtigungen. Auch der fünfte Satz erscheint dem Referenten jetzt als mehr als völlig sicher.

Die trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

im Intervalle  $(a, b)$  „im Allgemeinen“ convergent, wenn die Punkte  $x$ , in denen die Differenz der Unbestimmtheitsgrenzen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

größer als eine beliebige positive Zahl  $\delta$  oder  $\delta$  ist, eine discrete Menge bilden. Convergirt eine solche



finirt, ist eine Fourier'sche Reihe), und der Nachweis der vonemann angegebenen Entwicklungen einer gewissen nicht-integabeln Function in eine trigonometrische Reihe.

Am Schlusse findet man Regeln über die Differentiirung und Integrirung von trigonometrischen Reihen.

Auf dieselbe Weise wie Herr Harnack beweist Herr Halphén ein Satz (1). Er bemerkt (gegen Herrn Hugoniot), dass das Verschwinden des Integrales (2) bei  $\lim n = +\infty$  allein nicht rechtige, auf die Convergenz der Fourier'schen und ähnlicher Reihen zu schliessen. St.

HARNACK. Berichtigung. Klein Ann. XIX. 524-529.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 182.

---

LINDEMANN. Ueber das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen. Klein Ann. XIX. 517-523.

Durch Rechnung wird direct gezeigt, dass die Fourier'sche Reihe gleichmässig convergirt an einer Stelle, wo die dargestellte Function stetig ist (was Heine zuerst bewiesen hat); und dass die Convergenz derselben unendlich verzögert wird, wenn sich das Argument einer Stelle nähert, wo die dargestellte Function unstetig ist (was Seidel zuerst dargelegt hat). St.

---

DAVID. Application de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes. Résal J. (3) VIII. 61-72.

Siehe Abschn. III. Cap. 1. p. 129.

## Capitel 2.

### Besondere Reihen.

O. SCHIER. Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen.  
Wien. Gerold's Sohn.

---

AL. ZDRAHAL. Ueber eine Eigenschaft der Binomial Coefficienten. Cas. XI. 47. (Böhmisch).

Enthält einen neuen, auf combinatorischer Basis aufgebauten Beweis des Satzes, dass

$$\Sigma \binom{a}{\alpha} \binom{b}{\beta} \binom{c}{\gamma} \cdots = \binom{a+b+c+\cdots}{r},$$

falls die Bedeutung

$$r = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$$

eingeführt wird, und  $\binom{m}{\mu}$  symbolisch einen Binomialcoefficienten bezeichnet. Std.

---

J. C. O'NEIL DE MEDEIROS. Sobre um problema d'algebra elementar. Teixeira J. IV. 177-184.

Entwicklung von  $x^m + x^{-m}$  nach Potenzen von  $x^1 + x^{-1}$ .  
Tx. (0).

---

H. J. KRANTZ. Solution d'une question (1322). Nouv. Ann. (3) I. 419-421.

$\sqrt{5}$  ist die Grenze des Verhältnisses der beiden Reihen

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{34^2} + \frac{1}{89^2} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{3}{8} - \frac{4}{21} + \frac{5}{55} - \frac{6}{144} + \cdots.$$

0.



**RAWSON, R. KNOWLES.** Solution of a question (7049).  
Ed. Times XXXVII. 109.

Beweis, dass

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \dots \text{ in inf. } = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{2} \pi + \log(\sqrt{2}-1) \right\}.$$

0.

**JAMET.** Sur le développement de  $\arctang x$  en série convergente. Math. II. 52-57.

Die Entwicklung geschieht ohne Benutzung der Differential-  
Integralrechnung. Mn.

**J. STIELTJES jr.** Over een algorithmus voor het meetkundig midden. Nieuw Arch. IX. 198-211.

Diese Arbeit schliesst sich an eine andere desselben Ver-  
sers an, welche sich in Borchardt J. LXXXIX. p. 343 (siehe  
d. M. XII. 1880. p. 189) findet. Die Beweise der dort ge-  
gebenen Sätze über das geometrische Mittel einiger reeller Zahlen  
werden hier ausführlich mitgeteilt und durch Beispiele erläutert.  
Für complexe Werte der Zahlen liefert die Anwendung im All-  
gemeinen grosse Schwierigkeiten, welche nur verschwinden, wenn  
man sich auf zwei Zahlen beschränkt. G.

**SACHSE.** Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen  
und Euler'schen Zahlen durch Determinanten.

Hoppe Arch. LXVIII. 427-432.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 110.

**A. STERN.** Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen.  
Kronecker J. XCII. 349-351.

Während schon Euler in seiner Differentialrechnung gezeigt  
hat, dass die Bernoulli'schen Zahlen allmählich in's Unendliche

wachsen, hat der Herr Verfasser noch nirgends die einfache Eigenschaft dieser Zahlen bewiesen oder auch nur ausgesprochen gefunden, dass dieselben von der vierten an ohne jede Unterbrechung wachsen. Der Beweis hierfür wird ohne Schwierigkeit geführt, indem von der Euler'schen Definition der  $\nu^{\text{ten}}$  Bernoulli'schen Zahl ausgegangen wird:

$$B_\nu = \frac{1 \cdot 2 \dots 2\nu}{2^{2\nu-1} \pi^{2\nu}} S_{2\nu},$$

wo

$$S_{2\nu} = 1 + \frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{1}{3^{2\nu}} + \dots$$

ist. Aus den bekannten Werten für die ersten Bernoulli'schen Zahlen ergibt sich weiter, dass es deren nur zwei, nämlich  $B_2$  und  $B_4$  gibt, die einander gleich sind, und dass  $B_2$  und  $B_4$  kleiner als  $B_\nu$  für  $\nu > 4$  sind, während  $B_1 < B_\nu$  für  $\nu > 5$  ist.  
T.

A. BERGER. Elementära bevis för några formler i differenzkalkylen. Stockh. Öfv. XXXVII. 39-53.

Eine bekannte Relation der Bernoulli'schen Zahlen, sowie Ausdrücke für  $\sum k^m$  ( $m$  positiv, ganz) und  $\sum \log k$  werden auf neue Art hergeleitet. Ausserdem wird folgende halb-convergente Entwicklung für ein beliebiges reelles  $\mu < 1$  gegeben:

$$\begin{aligned} & 1^\mu + 2^\mu + \dots + x^\mu \\ &= \frac{x^{\mu+1} - 1}{\mu + 1} + \frac{x^\mu}{2} + K_\mu + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1} B_k(\mu) k}{2k x^{2k-1-\mu}} \\ & \quad + (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}(\mu) 2n+1}{2(n+1) x^{2n+1-\mu}} \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

wo die Constante  $K_\mu$  durch eine unendliche Reihe dargestellt ist.  
H.

G. F. WALKER. On a certain inequality and a limit.  
Mess. (2) XII. 37-38.

Beweis, dass für alle Werte von  $p$  und  $q$ , ausser 0,  $\frac{x^p - y^p}{x^q - y^q}$

hen  $\frac{p}{q}x^{p-q}$  und  $\frac{p}{q}y^{p-q}$  liegt. Daraus folgt, wie der Ver-  
r zeigt, dass für  $m = \infty$

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + m^p}{m^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Glr. (O.).

HOMAE. Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe. (Fortsetzung). Schlömilch Z. XXVII. 41-56.

Zwischen je drei Lösungen der im Früheren (Schlömilch Z. I, vgl. F. d. M. XIII. 1881. p. 196) aufgestellten dreigliedrigen Recursionsformel mit linearen Coefficienten in  $n$  findet eine re homogene Relation mit periodischen Coefficienten statt, deren Bestimmung es sich zunächst handelt. Da der Recursionsformel durch hypergeometrische Reihen genügt wird, in denen das letzte Element  $x$  als Parameter auftritt, so hat die Lösung dieser Aufgabe zugleich Wichtigkeit für die Frage der Bestimmung der durch die hypergeometrische Reihe definirten Function ihres letzten Elements über das Convergenzgebiet hinaus.

Diese Frage wird hier dadurch erledigt, dass die Reihen, Lösungen der Recursionsformel, zwischen denen der Zusammenhang festgestellt wird, als Functionen von  $n$  überall, und als Functionen von  $x$  in verschiedenen Gebieten, die gemeinsame Theile von  $n$ , convergiren. Die erhaltenen Resultate liefern dann das Mittel, die hypergeometrische Reihe als Function ihres letzten Elements vollständig zu definiren und ihren Verlauf in der  $n$ -Ebene, insbesondere ihr Verhalten bei Umkreisungen der kritischen Punkte 0, 1,  $\infty$  zu bestimmen. Hr.

HEPPEL and T. R. TERRY. Solutions of a question (18978). Ed. Times XXXVII. 98-100.

Die von Herrn Sylvester gestellte Aufgabe war die, nachzuweisen, dass, wenn  $i$  und  $j$  zwei ganze positive Zahlen, und  $j$  grösser als  $i$ ,

$$\begin{aligned}
& (x-1)(x-2)\dots(x-i+1) - \frac{j}{i-j+1} x(x-1)\dots(x-i+2) \\
& + \frac{j(j-1)}{(i-j+1)(i-j+2)} (x+1)x\dots(x-i+3) \\
& \frac{j(j-1)(j-2)}{(i-j+1)(i-j+2)(i-j+3)} (x+2)(x+1)\dots(x-i+4) + \dots \\
& = \frac{i-j}{i} \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-i)}{x+j-i}
\end{aligned}$$

ist. Diese merkwürdige Relation wird von Herrn Heppel durch den Schluss von  $j$  auf  $j+1$  bewiesen. Herr Terry benutzt zu Beweise die bekannte Reihe

$$1 - \frac{i}{1} \frac{p}{(i-p+1)} + \frac{i(i+1)}{1 \cdot 2} \frac{p(p-1)}{(i-p+1)(i-p+2)} + \dots = 0$$

für positive ganze  $p$ . Am Schluss wird auf den Zusammenhang der obigen Reihe mit der hypergeometrischen Reihe

$$F(i, -p, i-p+1, 1)$$

hingewiesen.

M.

M. D'OCAGNE. Sommutation d'une série remarquable.

Nouv. Ann. (3) I. 171-173.

Für die von Stainville (Gergonne Ann. t. IX.) und dann von Gergonne und Ampère (ib. t. IX. und XV.) behandelte verallgemeinerte Exponentialreihe

$$\begin{aligned}
S &= 1 + a \frac{z}{1} + a(a+k) \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots \\
&+ a(a+k)\dots(a+[n-1]k) \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots \left( z < \frac{1}{k} \right)
\end{aligned}$$

wird die Differentialgleichung  $\frac{dS}{dz} = \frac{a}{1-kz} S$  hergeleitet und

aus dieser ihre Summe  $S = (1-kz)^{-\frac{a}{k}}$  erhalten.

T.

E. CATALAN. Sur un article des Nouvelles Annales de Mathématiques. Math. II. 101.

## Die Reihe

$$+ a \frac{z}{1} + a(a+k) \frac{z^2}{1 \cdot 2} + a(a+k)(a+2k) \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

de Stainville, Gergonne, Ampère und M. d'Ocagne ist ein Spezialfall der Binomialreihe und hat zur Summe

$$(1 - kz)^{-\frac{a}{k}}.$$

Mn. (O.).

**D'OCAGNE.** Sur le développement des logarithmes et des exponentielles. Nouv. Ann. (3) I. 241-245.

Um aus einer der folgenden Reihen

$$f(x) = A_0 + A_1 \varphi(x) + A_2 \varphi(x)^2 + \dots + A_n \varphi(x)^n + \dots,$$

$$\log f(x) = a_0 + a_1 \varphi(x) + a_2 \varphi(x)^2 + \dots + a_n \varphi(x)^n + \dots$$

Coefficienten der anderen zu bestimmen, wird die erste logarithmisch, die zweite gewöhnlich nach  $x$  differentiiert; durch Gleichung der Coefficienten erhält man zwischen den  $a$  und  $A$  eine fortlaufende Reihe von Gleichungen folgender Art:

$$nA_n = na_n A_0 + (n-1)a_{n-1}A_1 + (n-2)a_{n-2}A_2 + \dots + a_1 A_{n-1},$$

$$(a_0 = \log A_0, A_0 = e^{a_0}),$$

Hülfe deren sich sowohl die  $a$  durch die  $A$ , wie umgekehrt, ausdrückend oder auch durch Determinanten darstellen lassen.

Entwickelungen von  $\log(1+x)$  und  $e^x$  nach Potenzen von  $x$  dienen als Beispiele. T.

**MACFARLANE.** Solution of a question (6859). Ed. Times XXXVI. 116-117.

Mit Hülfe der Formel

$$\log[a^2 + b^2 + 2ab \cos(\alpha - \beta)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log a + \frac{b}{a} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \cos 2(\alpha - \beta) + \dots,$$

$a, b; \alpha, \beta$  resp. Längen und Winkel zweier Vektoren in einer Ebene sind, wird bewiesen, dass

$$\begin{aligned}\log\left(1 - \frac{2\eta}{1+\eta^2} \cos x\right) &= -\eta^2 + \frac{1}{2}\eta^4 - \frac{1}{3}\eta^6 + \dots \\ &\quad - 2\eta \cos x - \frac{1}{2} \cdot 2\eta^3 \cos 2x - \frac{1}{3} \cdot 2\eta^5 \cos 3x - \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{\eta^{2i}}{i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\eta^i}{i} \cos ix.\end{aligned}$$

M.

J. COHN. Beweis einer Entwicklung einer Function der Länge und der Lage einer geraden Linie in eine gewisse unendliche Reihe. Warsch. J. 1881. (Polnisch).

Der Verfasser zeigt, wie eine von C. A. Bjerknes in der Schrift: „Sur le mouvement simultané des corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible“ ohne Beweis gegebene Entwicklung einer gewissen Function erhalten werden kann.

Dn.

TANNER, R. HARLEY. Solutions of a question (6919).  
Ed. Times XXXVII. 42-43.

Wenn

$$u_{x+1} - u_x^2 + u_x - 1 = 0,$$

so ist

$$\sum \frac{1}{u_x} = \frac{1}{u_0 - 1} - \frac{1}{u_{x+1} - 1}.$$

O.

Weitere Lösungen von Aufgaben über specielle Reihen von W. J. C. SHARP, A. McMURCHY, A. COHEN, K. GALE, T. R. TERRY, S. MARKS finden sich Ed. Times XXXVI. 35; XXXVII. 50, 112.

O.

# Sechster Abschnitt.

## Differential- und Integralrechnung.

### Capitel 1.

#### Allgemeines (Lehrbücher etc.).

**O. SCHLÖMILCH.** Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II. Aufgaben aus der Integralrechnung. 3<sup>te</sup> Aufl. Leipzig. B. G. Teubner.

Die in dieser reichen Sammlung enthaltenen, teils die einfachen Fälle erschöpfenden, teils als besonders instructiv ausgewählten Aufgaben beziehen sich auf Integration entwickelter Functionen einer Variabeln, Quadratur, Rectification, Cubatur, Complanation, Berechnung bestimmter Integrale, Reihen, Doppel- und dreifache Integrale, Mittelwerte, Differentialgleichungen erster und höherer Ordnungen. Regeln sind überall beigegeben.

H.

---

**M. PASCH.** Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig. B. G. Teubner.

Der Verfasser findet, dass die Principien der Differential- und Integralrechnung, mit wenigen Ausnahmen in den Lehrbüchern nicht mit der gegenwärtig erreichbaren Strenge entwickelt sind.









I. Theorie der Differentialgleichungen und der linearen Gleichungen mit partiellen Derivirten. II. Bestimmte Integrale. III. Differenzenrechnung. IV. Variationsrechnung. Das Buch enthält im 3<sup>ten</sup> und 4<sup>ten</sup> Teil einige Beweise des Verfassers, die strenger sind, als man sie gewöhnlich zu geben pflegt, nämlich 1) Aequivalenz der Grenze einer dreifachen Summe und eines dreifachen Integrals. 2) Derivation eines bestimmten Integrals nach einem beliebigen Parameter, wo die Grenze des Integrals und die integrierende Function Functionen dieses Parameters sind. 3) Fundamenteigenschaften der Euler'schen Integrale. 4) Bedingung des Maximums und Minimums in der Variationsrechnung in Form einer Differentialgleichung. Mn. (O.).

H. A. LORENTZ. Leerboek der differentiaal- en integraal-rekening en van de eerste beginselen der analytische meetkunde met het oog op de toepassingen in de natuurwetenschap. Leiden. Brill.

Ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von ganz besonderem Charakter. Die mathematische Strenge, die ausführliche Entwicklung von Formeln und Theorien, welche noch keine Anwendung gefunden haben, sind in den Hintergrund geschoben, aber die Anwendungen auf Mechanik und Physik besonders hervorgehoben. Auf diese Weise wird das ganze Gebiet durchlaufen und jedesmal nur so viel von den Theorien mitgeteilt, als für die Anwendungen nötig ist.

Voran geht eine kurze Uebersicht der Functionenlehre und der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume. Dann folgt die Differentialrechnung. Hier werden die wichtigsten Regeln für das Differentiiren mitgeteilt, auch die Differentialquotienten höherer Ordnung neben den partiellen Differentialquotienten kurz behandelt. Alsdann wendet sich der Verfasser zu den Grundbegriffen und Grundformeln der Integralrechnung, wobei die doppelten und vielfachen Integrale betrachtet werden. Nun folgt der Taylor'sche Satz, die Behandlung einiger bestimmter Integrale, der Satz von Fourier und eine kurze Uebersicht der

Theorie der Differentialgleichungen. Jedem Abschnitt sind viele Anwendungen, hauptsächlich aus der theoretischen Physik, zugefügt, deren Auflösung am Schlusse des Werkes mitgeteilt wird.  
G.

## Capitel 2.

### Differentialrechnung (Differentialle, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

T. J. STIELTJES jr. Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke. Nieuw Arch. IX. 106-111.

Einige Bemerkungen über die Differentialquotienten einer Function einer Veränderlichen. Besonders wird gezeigt, dass es für die Gültigkeit von

$$\lim \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(X)$$

notwendig ist, dass  $f'(x)$  für  $x = X$  stetig sei, wie an einigen Beispielen gezeigt wird. Weiter wird bewiesen, dass der Ausdruck

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(X),$$

wobei

$$r(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}), \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1},$$

giltig bleibt, wenn bei der Convergenz  $x_1$  und  $x_{n+1}$  immer  $X$  einschliessen und  $f^{(n-1)}(x)$  für den besonderen Wert  $x = X$  einen endlichen Differentialquotienten  $f^{(n)}(X) = k$  hat.  
G.

W. W. JOHNSON. On certain symbolic relations.

Mess. (2) XI. 191-192.

Es wird bewiesen, dass Operatoren von der Form

$$x'' = \frac{d^n}{dx^n} x'$$

mutativ sind, wie z. B.

$$\frac{d^m}{dx^m} x^{m+p} \frac{d^p}{dx^p} = x^p \frac{d^{m+p}}{dx^{m+p}} x^m.$$

zu werden Anwendungen gegeben.

Glr. (O.).

L. P. DA SILVA. Derivadas de ordem qualquer de  $y$  em ordem a  $x$  quando è  $f(x, y) = 0$ . Teixeira J. IV. 109-118.

Herr Silva sucht den analytischen Ausdruck der Derivirten  $n$ -ten Ordnung von  $y$  nach  $x$ , wenn  $y$  durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gegeben ist. Er bestimmt zuerst die Form dieses Ausdruckes mit Hülfe auf einander folgender Differentiationen und bestimmt dann die Coefficienten durch Betrachtung des speciellen Falles:

$$y \frac{1}{x^p} (x + x^2 + \dots + x^n) - 1 = 0.$$

Tx. (O.).

. DARBOUX. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques. C. R. XCIV. 575-577.

Der Verfasser knüpft nochmals an den Satz von Hermite an, von welchem er in den C. R. XCII. 1123. (s. F. d. M. XIII. 1881. 209) ausgegangen war, indem er die allgemeine Bedingung der betreffenden Eigenschaft algebraischer Functionen suchte, um nun die Eigenschaft selbst zu verallgemeinern. Durch eine algebraische Gleichung zwischen  $z, x_1, x_2, \dots, x_\mu$  wird  $z$  als Function der  $x$  bestimmt. Die Gleichung sei vom Grade  $m$  sowol in Bezug auf  $z$  als auf die Gesammtheit der Variabeln. Differentiirt man sie  $(m+1)$ -mal, indem man alle  $dx$  als constant betrachtet, so lässt sich beweisen, dass kein Term ohne ein höheres Differential von  $z$  als Factor vorkommt, so dass man auf viele Arten die Form erhält:

$$(2) \quad d^{m+1}z = A_1 d^m z + A_2 d^{m-1} z + \dots + A_{m-1} d^2 z.$$



**MANSION.** Méthode dite de Fermat pour la recherche des maxima et des minima. Math. II. 193-202.

1) Geschichtliches. Die nach Fermat benannte Methode verankern wir in Wirklichkeit Descartes oder vielmehr Huygens. Die in den „Varia opera“ von Fermat aus einander gesetzte Methode ist in ihrem Princip mit der gewöhnlich in der Differentialrechnung aus einander gesetzten Methode gleich. 2) Die Methode von Huygens besteht in Folgendem: Wenn  $F(b)$  ein Maximal- oder Minimalwert von  $F(x)$  ist, so ist

$$F(a) = F(c), \quad a < b < c.$$

Daraus folgt unter der Voraussetzung, dass  $F'(x)$  einen einzigen Wert für  $x = b$  hat, leicht, dass

$$\lim_{c \rightarrow a} \frac{F(c) - F(a)}{c - a} = F'(b) = 0,$$

wenn  $a$  und  $c$  gegen  $b$  convergiren. Daraus ergibt sich die Regel: Wenn  $F(b)$  ein Maximal- oder Minimalwert von  $F(x)$  ist, so ist die Derivirte  $F'(x)$  gleich 0 für  $x = b$ , oder hat nicht nur einen einzigen Wert. (Beispiel:  $F(x) = x \cdot \text{Th } \frac{1}{x}$  für  $x = 0$ ). Der zweite Teil dieses letzten Schlusses wird häufig nicht beachtet. Die Theorie lässt sich übrigens völlig ohne Zuhülfenahme des Taylor'schen Satzes aus einander setzen. Mn. (O.).

**W. WALTON.** On the method of finding maxima and minima of functions of one variable and of two independent variables. Mess. (2) XII. 14-20.

Methode, um zwischen Maximum und Minimum ohne Benutzung der zweiten Derivation zu entscheiden. Glr. (O.).

**W. WALTON.** On the determination of the maxima and minima of a function of any number of independent variables. Mess. (2) XII. 42-43.

Ausdehnung der Resultate der obigen Arbeit auf  $n$  unabhängige Variabele. Glr. (O.).





tion  $Q^n(x)$  der Function  $P^n(x)$  in der Theorie der Kugelfunctionen oder  $O^n(x)$  zu  $J^n(x)$  in der der Bessel'schen.

Ty.

BUCHHEIM. Some applications of symbolic methods. Mess. (2) XI. 143-145.

Die Arbeit enthält Beweise mittels symbolischer Methoden: 1) der Formel für die  $n^{\text{ten}}$  Differentialcoefficienten der Function  $F(x)$ , 2) von Euler's Satz über homogene Functionen, 3) von Staudt's Satz über Bernoulli'sche Zahlen.

Glr. (O.).

S. MEYER, MATZ. Solutions of a question (6889). Ed. Times XXXVII. 45.

$$D^r x^r F(x) = 1 \cdot 2 \dots r \left[ F(x) + x F'(x) + \frac{1}{2!} D x^2 F'(x) + \frac{1}{3!} D^2 x^3 F'(x) + \dots \right] \quad (r+1) \text{ Glieder.}$$

Beweis mittels des Schlusses von  $n$  auf  $n+1$ . O.

Busk, MATZ. Solutions of a question (6796). Ed. Times XXXVII. 26.

Beweis, dass

$$e^{hx} D e^{hx} = \frac{1}{1-h} C^{\frac{hx}{1-h}}.$$

O.

J. WALKER. Solution of a question (6738). Ed. Times XXXVI. 63.

Beweis, dass

$$D^n f(xD) X = f(xD+n) D^n X.$$

O.



de Hermite in seinem „Cours d'Analyse de l'École polytechnique“ gezeigt hat, kann man beim Integral

$$\int q(x)dx,$$

wo  $q(x)$  eine rationale Function bedeutet, den diesbezüglichen rationalen Teilwert bestimmen, ohne die Wurzelwerte des in der Function vorkommenden Nenners zu kennen.

Der Verfasser entwickelt nun in der I. Abt. die Methode von Hermite und wendet sie ausser den bekannten Fällen auch auf

$$\int \frac{dx}{(x^5 + 5px^4 + q)^2}$$

an, wie man durch fortschreitende Annäherung das allgemeine Integral bestimmen kann, falls die Factoren des Nenners bekannt sind, wobei er mit der Bestimmung von

$$\int \frac{F(z)dz}{(z+a_1)^{l_1} (z+a_2)^{l_2} \dots (z+a_n)^{l_n}}$$

aus den allgemeinen und Speciellen schliesst.

Std.

APTEYN. Over den vorm van zekere differentiaal, en integraal zuiver algebraische functionen zijn over hunne integralen. Amst., Versl. en Meded. XVII. 1828.

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Form gewisser Differentialen, deren Integrale rein algebraische Functionen sind, und deren Integrale. Zunächst wird

$$\int \sqrt[q]{F(x)} dx,$$

wo  $F(x)$  eine rationale Function von  $x$  und  $q$  eine ganze Zahl bedeutet, besprochen und die allgemeinste Form angegeben, welche  $F(x)$  besitzen kann, wenn das genannte Integral rein algebraisch sein soll. Weiter werden die Fälle angegeben, in denen  $F(x)$  auf die Form gebracht ist:

$$(x-\alpha)^m (\beta + \gamma x + \dots + \lambda x^n)^p,$$

wo

$$\alpha, \beta, \dots, \lambda, m, n, p$$

Constante sind, welche gewissen Bedingungen genügen. Besondere Fälle sind:  $x^m(a+bx^n)^p$  und  $x^m(a+bx+cx^{2n})^p$ . Die betreffenden Integrale werden bestimmt. Darauf wird gezeigt, in welchen Fällen

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

rein logarithmisch ist, und welches die allgemeinen Reductionsformeln dieses Integrals sind. Hinsichtlich der letztgenannten Form kommt der Verfasser zu dem Schluss: Wenn in

$$x^m(a+bx+cx^{2n})^p dx$$

die Exponenten den Bedingungen

$$p = -\frac{2k+1}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

$$m = k_1 n - 1 \quad (k_1 = 1, 2, \dots, 2k)$$

genügen, so ist das Integral rein algebraisch, und zwar gleich

$$\frac{C}{C^{1+p}} (a+bx^n+cx^{2n})^{1+p} (X^m + A_n X^{(r-1)n} + \dots + A_{rn}),$$

worin sich die Unbekannten

$$\frac{C}{C^{1+p}}, A_n, A_{2n}, \dots, A_{rn}$$

aus  $r+1$  bekannten linearen Gleichungen ergeben und

$$r = 2k - 1$$

ist.

G.

H. B. D. Solution d'une question (1415). Nouv. Ann. (3) 1  
526-527.

Es handelt sich um das Integral

$$\int \frac{\alpha x + (n-1)\beta}{x} \cdot \frac{(\alpha x + \beta)^{\frac{n}{2}-1} dx}{\sqrt{x^{n+1} + (\alpha x + \beta)^n}} = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \arctang\left(\frac{z}{\sqrt{\pm 1}}\right) + b,$$

wo

$$z = \sqrt{\frac{x^{n+1} + (\alpha x + \beta)^n}{(\alpha x + \beta)^n}}$$

ist.

O.

ORLETTI. Solution d'une question (1377). Nouv. Ann.  
I. 376-377.

Es handelt sich um specielle Fälle des Integrals

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^m(x)-1}} = \frac{2}{m} \operatorname{arc tang} \sqrt{\varphi^m(x)-1} + C.$$

O.

ÉALIS. Sur quelques intégrales indéfinies. Nouv. Ann.  
I. 343-351.

Eine grosse Anzahl von Integralen, welche die Form elliptischer Integrale dritter Gattung haben, wird durch irrationale Substitution aus der Arcustangensformel hergeleitet; sie sind theils theils schon von Euler und Anderen behandelt.

H.

I. PHILBRICK. Integration of some general classes of trigonometric functions. Anal. IX. 177-180.

Reductionsformeln für

$$\int \frac{dx}{(a+b \sin x)^n}$$

ähnliche Formen, in denen  $\cos x$ ,  $\operatorname{tang} x$ ,  $\operatorname{cotg} x$ ,  $\sec x$  an-  
statt von  $\sin x$  stehen. Jn. (O.).

„ P. DA SILVA. Sobre alguns integraes indefinidos.  
Brazileira J. IV. 87-90.

Herr Silva zeigt, dass man durch Vereinigung der Methode der theilweisen Integration mit der Substitution zu folgenden Integralen gelangen kann:

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{u}{v}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

wo

$$u = x \sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x \cos x;$$

Resultat, das sich übrigens auch in Hermite's Cours d'analyse  
findet. Tx. (O.).



$$\begin{aligned}
& \int_0^u \arctg \frac{v \sin \beta}{u \sqrt{v^2 + \cos^2 \beta}} dv - d \arctg \frac{\sin \beta}{\sqrt{v^2 + \cos^2 \beta}} \\
& \int_0^{u_1} \arctg \frac{v_1 \sin \beta_1}{u_1 \sqrt{v_1^2 + \cos^2 \beta_1}} dv_1 - d \arctg \frac{\sin \beta_1}{\sqrt{v_1^2 + \cos^2 \beta_1}} = \\
& R(\arctg u + \arctg u_1 - R) - \arctg \frac{\sin \beta}{\sqrt{v^2 + \cos^2 \beta}} \arctg \frac{\sin \beta_1}{\sqrt{v_1^2 + \cos^2 \beta_1}},
\end{aligned}$$

welcher letzteren

$$\sin \beta = u \operatorname{tg} \beta_1; \sin \beta_1 = u_1 \operatorname{tg} \beta$$

. Reducirt man beständig abwechselnd mit beiden Relationen den beliebigen Wert der Function

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \int_0^\beta \psi d\varphi,$$

$$\left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2 + \left( \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \alpha \sin \beta} \right)^2 = 1; \sin \delta = \sin \beta \cos \gamma$$

, auf einen neuen, so gelangt man nach sechs Reductionen wieder zu dem ursprünglichen Functionswert. Der so gebildete Cyklus aus sechs Functionswerten, entsprechend sechs Wertsystemen der  $\beta, \gamma$ , die in bestimmten einfachen trigonometrischen Beziehungen stehen, ist verbunden durch die sechs Beziehungen:

$$\begin{aligned}
2(W + W_1) &= R(\alpha + \alpha_1 - R) - \gamma_3 \gamma_1, \\
2(W_1 + W_2) &= R(\alpha + \alpha_3 - R) - \gamma_1 \gamma_2, \\
2(W_2 + W_3) &= R(\alpha_2 + \alpha_3 - R) - \gamma_5 \gamma_1, \\
2(W_3 + W_4) &= R(\alpha_2 + \alpha_5 - R) - \gamma_3 \gamma_4, \\
2(W_4 + W_5) &= R(\alpha_4 + \alpha_5 - R) - \gamma_1 \gamma_2, \\
2(W_5 + W) &= R(\alpha_4 + \alpha_1 - R) - \gamma_5 \gamma.
\end{aligned}$$

Die Function  $W(\alpha, \beta, \gamma)$  drückt die Grösse des Winkels von vier Dimensionen aus, dessen vier Kanten die Grenzpunkte der Strecken einer orthogonalen gebrochenen Linie mit dem Ende derselben verbinden, und zwar bezeichnen  $\alpha, \beta, \gamma$  die spitzen Winkel, welche die successiven Strecken, von der 2<sup>ten</sup> an, mit der Geraden zwischen ihrem Endpunkt und dem nächstvorhergehenden Grenzpunkt bilden. Ein solcher Winkel wird ein Elementartetrapop genannt. Aus den Relationen ergeben sich viele Specialwerte der Function,





DRLOW. Sur une intégrale double. Nouv. Ann. (3) 1. 1-318.

Didon hat in den Ann. de l'Éc. Norm. VII. 89. (s. F. d. M. II. . 302) das Doppelintegral

$$\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1} (1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}} (1-2by+b^2)^{-\frac{b}{2}} dx dy,$$

$x, y$  innerhalb  $x^2+y^2 \leq 1$  variiren, für positive ganze  $\mu$  entwickelt dargestellt, und es hat sich dabei gezeigt, dass es allein von  $ab$  ist. Letzteres Resultat gilt jedoch für jedes reelle  $\mu$ . Der Beweis dafür ist der Inhalt des Gegenwärtigen. Es ergibt sich ferner, dass zwei Formeln, welche Didon findet, als Specialfälle in einer allgemeineren enthalten sind.

H.

## Capitel 4.

### Bestimmte Integrale.

IVANOFF. Sur les intégrales définies uniformément convergentes. S. M. F. Bull. X. 147-157.

Der Verfasser sucht die Bedingung, unter der die Derivirte eines bestimmten Integrals für die Grenze unendlich durch Differentiation unter dem Integralzeichen gefunden wird, und wendet, da diese Betrachtung nicht zum Ziele führt, die Methode von Weierstrass an, die, bezüglich auf unendliche Reihen, den Begriff der gleichmässigen Convergenz (convergence uniforme) einführt. In Bezug auf Integrale lautet die Definition: Das Integral

$$\Phi(x) = \int_a^x f(x, z) dz$$

ist gleichmässig convergent, wenn man für alle Werte von  $x$  innerhalb eines Bezirks eine Zahl  $p$  so bestimmen kann, dass



ing, nicht aber mit der Voraussetzung, dass  $F(x)$  ein  
omen sei; denn es wird u. a.  $F(x) = \sin mx$  gesetzt, d. h.  
renzwert eines Polynoms als Polynom betrachtet.

H.

ILLNER. Sur les intégrales définies des fonctions  
ne variable complexe. Stockh. Handl. XVIII. No. 6.

Der Verfasser beabsichtigt in der ersten Abteilung dieser  
idlung, eine allgemeine Integrationsformel zu geben, die  
nur für rationale, sondern auch für doppelt-periodische und  
se andere Functionen gilt. Diese Formel wird in folgender  
hergestellt:

$$M, \int_r^x \frac{\psi(x)dx}{(x-a)^s F_1(x)} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} \left[ \frac{\psi(a)}{F'(a)} \log \frac{II(a)}{II_1(a)} \right] \\ + \frac{\psi(a_1)}{F(a_1)} \log \frac{II(a_1)}{II_1(a_1)} + \dots + \frac{\psi(a_k)}{F(a_k)} \log \frac{II(a_k)}{II_1(a_k)},$$

$F_1(x)$  und  $\psi(x)$  rationale ganze Functionen von  $x$  sind;

$$F(x) = (x-a)^s F_1(x),$$

$$F_1(x) = (x-a_1) \dots (x-a_k),$$

$$II(x) = (x-x_1)^{M_1} \dots (x-x_\mu)^{M_\mu},$$

$$II_1(x) = (x-h_1)^{M_1} \dots (x-h_\mu)^{M_\mu},$$

noch die Bedingungen kommen, dass  $F(x)$  von höherem  
ist als  $\psi(x)$ , sowie dass  $F(x)$  und  $\psi(x)$  nicht gemeinsame  
eln haben. In der zweiten Abteilung untersucht der Ver-  
, unter welchen Bedingungen seine Integrationsmethode in  
heorie der Quaternionen angewandt werden kann.

E.

ERRE. Sur quelques équations transcendantes.  
Z. XCIV. 160-163.

ERRE. Sur la détermination du genre d'une fonc-  
n transcendante entière. C. R. XCIV. 635-638.



rn stehenden Zahl bedeutet; diese letzte Function ist aber llich und stetig von  $x = -\infty$  bis  $x = +\infty$ .

Herr Gosiewski zeigt an einem anderen Beispiele die Richtigkeit der Cohen Stuart'schen Bemerkung. Für die endliche und tige Function

$$F'(x) = -\frac{\pi}{4} \frac{\sin(\pi \operatorname{tg} x)}{\cos^2 x \sqrt{(E \operatorname{tg} x)^6 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} x\right)}}$$

det der Verfasser

$$\int_{+0}^a F'(x) dx = \sqrt{(E(\operatorname{tg} x))^6 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} x\right)} - 1 \\ - \sum_{n=1}^{n=E(\operatorname{tg} x)} \left[ \sqrt{n^6 + \cos^2 n \frac{\pi}{2}} - \sqrt{(n-1)^6 + \cos^2 n \frac{\pi}{2}} \right].$$

r  $x < \frac{\pi}{2}$  ist  $\int_0^x f'(x) dx$  endlich und stetig; für  $x = \frac{\pi}{2} - 0$

rd das Integral unbestimmt ( $\infty - \infty$ ) und bleibt unbestimmt

: alle Werte von  $x$ , die grösser sind als  $\frac{\pi}{2}$  u. s. f. So lange

so für diese Werte die Summe

$$\sum_{n=1}^{n=E(\operatorname{tg} x)} \sqrt{n^6 + \cos^2 n \frac{\pi}{2}} - \sqrt{(n-1)^6 + \cos^2 n \frac{\pi}{2}}$$

cht in eine neue Form, in welcher die Unbestimmtheit ver-  
bwindet, verwandelt werden kann, so lange können wir auch  
cht behaupten, dass die Function  $F(x)$  das allgemeine Integral  
r Function  $F'(x)$  darstellt. Dn.

. HOPPE. Infinitärer Hauptwert und approximative  
Entwicklung. Hoppe Arch. LXVIII. 37-52.

Im Anschlusse an einen Aufsatz von Schröder und Schlö-  
ilch (vgl. d. Jahrbuch XII. 1880. p. 225) giebt der Herr Verfasser  
ne Entwicklung des bestimmten Integrals

$$C_n = \int_0^1 (u)_n du$$



**ch α.** Für  $a = 1$  ergeben sich bemerkenswerte Formeln. Die rechte Formel wird noch transformirt: die zwei Integrale lassen sich in imaginärer Form auf eins reduciren, dann auch durch ein Doppelintegral ausdrücken. Aehnlich werden dargestellt:

$$\arg \operatorname{cn} a = K - \frac{2}{\pi} \int_0^{K+iK'} \operatorname{arctg} \left( \frac{ak \operatorname{cn} u}{k'} \right) du,$$

$$\arg \operatorname{dn} a = K + iK' + \frac{1}{\pi} \int_{K'}^{K'+iK} \log \frac{1 - a \operatorname{sn}(u, k')}{1 + a \operatorname{sn}(u, k')} du;$$

ersterer Formel ist  $a \geq 1$  und  $\leq \frac{k'}{k}$ , in letzterer  $a \leq k'$ .

H.

**STEEN.** Om et bestemt Integral som diskontinuert Funktion. Zenthen T. (4) VI. 65-68.

Das Integral ( $m$  eine ganze Zahl)

$$\begin{aligned} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^m ax}{x^m} dx &= \pm \frac{\pi a^{m-1}}{2 \cdot 4 \dots 2(m-1)} \left\{ m^{m-1} - \frac{m}{1} (m-2)^{m-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} (m-4)^{m-1} - \dots \right\} \end{aligned}$$

igt für  $a = 0$  eine besondere Discontinuität, welche in der graphischen Darstellung nur sichtbar für  $m = 1$  oder  $m = 2$  hervortritt, während sie für grössere  $m$  sich nur in den  $(m-1)^{\text{ten}}$  und höheren Differentialquotienten erkennen lässt.

Gm.

**FOLSTENHOLME, C.B.S.CAVALLIN.** Solutions of a question (6507). Ed. Times XXXVI. 86-87.

Sind  $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  lauter positive Grössen, so ist

$$\int_0^x \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \dots \sin a_n x \cos b_1 x \cos b_2 x \dots \cos b_m x \sin \lambda x}{x^{n+1}} dx$$

gleich  $\frac{\pi}{2} a_1 a_2 \dots a_n$ , wenn  $\lambda$  einen Wert hat, der nicht kleiner als  $\Sigma(a) + \Sigma(b)$  ist.

O.

T. R. TERRY, MATZ. Solutions of a question (6655).

Ed. Times XXXVI. 52.

Je nachdem  $q$  eine ganze Zahl, grösser oder kleiner als ist, ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \cos^{2q}\theta d\theta = \frac{\pi}{2^{2p+2}} \cdot \frac{(2p)!}{(p!)^2}$$

oder

$$= \frac{\pi}{2^{2p+2}} \left\{ \frac{(2p)!}{(p!)^2} + \frac{(2p)!}{(p+q)! (p-q)!} \right\} 0.$$

-----

WOLSTENHOLME. Two notes: 1) A definite integr  
2) Equation of the director-circle of a conic. L  
M. S. Proc. XIII. 185-188.

1) Ist  $\frac{x^n}{n!}$  X der Rest der Maclaurin'schen Reihe für /  
so wird gefunden:

$$\int_0^x \frac{X}{x^r} dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r)}{\Gamma(n+r)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(x)dx}{x^r},$$

wo  $r$  eine Constante  $< 1$ . Zur Herleitung sind jedoch diverge  
Integrale verwandt worden.

2) Die Gleichung des Director-Kreises, in Cartesischen C  
dinaten ausgedrückt:

$$\frac{\delta^2 u^{\frac{1}{2}}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u^{\frac{1}{2}}}{\delta y^2} = 2 \frac{\delta^2 u^{\frac{1}{2}}}{\delta x \delta y} \cos \omega,$$

wo  $u = 0$  die Gleichung eines Kegelschnitts,  $\omega$  den Wir  
zwischen den Axen der  $x$  und  $y$  bezeichnet, wird in homoge  
und in trilinearen Coordinaten dargestellt. Ferner werden  
Gleichungen der Brennpunkte

$$\frac{\delta^2 u^{\frac{1}{2}}}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 u^{\frac{1}{2}}}{\delta y^2} = \frac{\delta^2 u^{\frac{1}{2}}}{\delta x \delta y} \sec \omega$$

in die für Arealcoordinaten transformirt.

H.

-----



. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala. E. Berling. 4<sup>o</sup>.

Siehe Abschn. III. Cap. 1. p. 128.

. J. THOMSON. Note on  $\int_0^\infty \frac{\cos sx}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}} dx$ . Quart. J. XVIII. 377-381.

Das Integral ist ein Specialfall dessen, welches Glaisher in einem Aufsatz „On Riccati's equation“ Phil. Trans. 1881 (siehe d. M. XIII. 1881. p. 273.) behandelt hat, nämlich der einzige, auf den dessen Ausdruck nicht anwendbar ist. Es lässt sich zunächst leicht auf den Wert für  $p = 0$  reduciren, was hier in der Form geschieht:

$$v_p = s^{-p} \int_0^\infty \frac{\cos sx}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}} dx = \frac{\left(-\frac{2s}{a^2}\right)^p}{1.3...(2p-1)} \frac{d^p v_0}{(d \cdot s^2)^p},$$

und genügt der Gleichung

$$\frac{d^2 v_p}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dv_p}{ds} - \left(\frac{p^2}{s^2} + a^2\right) v_p = 0,$$

daraus zunächst:

$$\frac{d^2 v_0}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dv_0}{ds} - a^2 v_0 = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach Stokes (Cambr. Phil. Trans. 1880):

$$v_p = \left(E + \frac{1}{2} D \log \frac{1}{a^2 s^2}\right) \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(as)^{2k}}{2^{2k} k!^2} + D \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(as)^{2k}}{2^{2k} k!^2} \sum_{h=1}^{h=k} \frac{1}{h}.$$

Für den vorliegenden Fall muss  $v_0$  für  $r = \infty$  verschwinden. Unter dieser Bedingung fand Stokes:

$$\frac{E^*}{D} = k = \log 8 + \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 0,11593.$$

\*) Im Text verdruckt.

Aus der Bedingung für  $s = 0$ , dass  $sv_1 = a^{-2}$  werden muss, giebt sich  $D = 1$ , also  $E = k$ . Nachdem hiermit  $v_0$  bestimmt ist, folgt der Wert von  $v_p$ . Da für grosse  $as$  die Reihen sehr spät zu convergiren anfangen, so entwickelt der Verf.  $v_0$  noch in folgender Form:

$$v_p = \frac{e^{-as}}{\sqrt{s}} \left( A_0 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \dots \right)$$

und findet:

$$A_k = \frac{A_0}{(2a)^k} \prod_{h=0}^{k-1} \left[ p^2 - \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{a^{-p}}{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}.$$

H.

A. WINCKLER. Ueber die Entwicklung einiger von Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhängige Ausdrücke in Reihen. Wien. Ber. LXXXV. 1039-1067.

Durch Zerlegung des Intervalls in die Vielfachen von  $\varrho$  gefunden:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{k=\infty} (a-1)(a-2)\dots(a-k) \varphi(n) \psi(a-n-1)$$

$$\varphi(n) = 1 - \left( 1 + \frac{\varrho}{1!} + \dots + \frac{\varrho^n}{n!} \right) e^{-\varrho}; \quad \psi(a) = \sum_{k=1}^{k=\infty} (k\varrho)^a e^{-k\varrho},$$

das ist mit einer Umformung von  $\varphi(n)$  ein Resultat von Herrn Demnächst wird die Entwicklung

$$[\Gamma(a+p+1)]^r = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n a^n \quad (p \text{ positive ganze Zahl})$$

in Angriff genommen, welche Bourguet für zwei Specialfälle untersucht hatte. Voraus bekannt ist

$$K_0 = (p!)^r;$$

dadurch sind die übrigen Coefficienten recurrrend bestimmt durch die Relation

$$K_n = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k s_k K_{n-k},$$

$$-s_1 = \Gamma'(1) + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{1}{h}; \quad s_k = \sum_{h=p+1}^{h=\infty} h^{-k}.$$

wird weiter gezeigt, welche Mittel zur Berechnung zu Gebote kommen, namentlich für die von Bourguet behandelten Fälle  $r = 1$  und  $r = -1$ . H.

TANNERY. Sur les intégrales eulériennes. C. R. XCIV. 1698-1701.

TANNERY. Rectification à une communication antérieure sur les intégrales eulériennes. C. R. XCV. 75.

Das Gegenwärtige knüpft an Prym's Zerlegung

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{k=x} \frac{(-1)^k}{k! (x+k)} + Q(x)$$

wo  $Q(x)$  nach Potenzen von  $x$  entwickelt und die Coefficienten durch bestimmte Integrale dargestellt sind. Der Verfasser stellt dafür folgenden Ausdruck auf:

$$eQ(x) = \frac{1}{2-x - \frac{1(1-x)}{4-x - \frac{2(2-x)}{6-x - \frac{3(3-x)}{8-x - \dots}}}}$$

bewiesen nur für reelle  $x$ . Der Beweis stützt sich auf folgenden Satz. „Sind  $U = \sum u_n x^n$  und  $V = \sum v_n x^n$  zwei Reihen, die für  $x < a$  convergiren, für  $x = 0$  divergiren, sind  $u_n$  und  $v_n$  positiv und ist, für  $n = \infty$ ,  $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lambda$ , so ist auch  $\lim \frac{U}{V} = \lambda$ .“ Dabei wird bemerkt, dass ein specieller Fall dieses Satzes von Appell in den C. R. LXXVII. 690, s. F. d. M. X. 1878. 184 publicirt ist. In dem späteren Artikel wird hinzugefügt, dass Appell in Brunert Arch. 1879 (LXIV.) 387, siehe F. d. M. XII. 1880. 185 den Satz selbst gegeben hat. Der Appell'sche Satz ist nicht auf die Voraussetzung einer gemeinsamen Grenze der Convergenz und auf diese Grenze beschränkt, sondern behauptet schlechthin die Gleichheit des Grenzwerts des Quotienten der divergenten

Reihensummen mit dem der allgemeinen Glieder, wofern letztere existirt. Die Herleitung des obigen Ausdrucks für  $Q$  beruht auf der Zerlegung des unbestimmten Integrals in den Quotienten zweier Grössen

$$z = e^{\frac{1}{1-x}} (1-x)^p, \quad u = e^{\frac{1}{1-x}} (1-x)^p \int_0^x \frac{dx}{(1-x)^{p+1} e^{\frac{1}{1-x}}}$$

und Entwicklung derselben nach Potenzen von  $x$ . Dann nämlich ist

$$Q(p) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{u}{z} \quad (x = 1).$$

Für  $u$  und  $z$  werden Differentialgleichungen gefunden, daraus Relationen für die Coefficienten hergeleitet und diese durch obigen Kettenbruch gelöst. Zum Schlusse wird  $Q$  in folgende Reihe entwickelt:

$$eQ(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{n! (x-1)(x-2)\dots(x-n)}{q_n q_{n+1}},$$

$$q_n = \sum_{h=0}^{h=n} \frac{n(n-1)\dots(n-h+1)(n-x)(n-1-x)\dots(n-h+1-x)}{h!}.$$

H.

A. BERGER. En generalisation af några formler i Gammafunktionens teori. Stockh. Öfv. 1881. 13-30.

Zu einer, die  $\Gamma$ -Function speciell enthaltenden gleichen und analogen Relationen unterworfenen allgemeineren Function gelangt der Verfasser auf folgende Weise. Die Function  $f(x)$  sei endlich und stetig für  $x > 0$ , ferner verschwinden alle ihre Derivationen für  $x = \infty$ . Dann ist die in Rede stehende Function, als Verallgemeinerung von  $\log \Gamma(x+1)$ :

$$F(x+1) = xf(1) + \sum_{k=1}^{k=x} \{f(k) - f(k+x) + x[f(k+1) - f(k)]\}.$$

Namentlich ergibt sich:

$$F(x+1) - F(x) = f(x); \quad F(1) = 0;$$

$$F(x) + F(1-x) = -f(x) + \sum_{k=1}^{k=x} \{-f(k-x) + 2f(k) - f(k+x)\}$$

nebst speciellen Folgerungen. Besonders eingehend wird der

ist der Bernoulli'schen Reihenentwicklung untersucht. Schliess-  
 wird speciell  $f(x) = \log x$  gesetzt, wodurch  $F(x)$  in  $\log \Gamma(x)$   
 übergeht, und eine Reihe bekannter Relationen der  $\Gamma$ -Function  
 Resultate zusammengestellt. Unter diesen finden sich jedoch  
 hat der Ausdruck von  $\Sigma \log \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right)$  und der Gauss'sche  
 Ausdruck von  $\Gamma'\left(\frac{k}{n}\right) : \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$ , denen entsprechend also kein  
 Analogon für  $\Sigma F\left(x + \frac{k}{n}\right)$  und  $F'\left(\frac{k}{n}\right)$  gefunden ist.

H.

W. L. GLAISHER. On certain definite integrals invol-  
 ving the exponential-integral. Quart. J. XVIII. 370-377.

Das Exponentialintegral wird definirt für positive und nega-  
 tive  $x$  durch

$$\text{Ei } x = \gamma + \frac{1}{4} \log(x^4) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}, \text{ wo } \gamma = -\Gamma'(1).$$

Diese Function wird nach Multiplication mit Exponentialfunctionen  
 integriert, und folgende Formeln werden gefunden:

$$\int_0^x \text{Ei}(-ax^n) dx = -\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) a^{-\frac{1}{n}}$$

$$\int_0^x e^{-ax} \text{Si } bx dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{b}{a}$$

$$\int_0^x e^{-ax} \text{Ci } bx dx = -\frac{1}{2a} \log\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\int_0^x \text{Ei}(-ax) e^{-bx} dx = -\frac{1}{b} \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

$$\int_0^x \text{Ei}(-ax) \sin bx dx = -\frac{1}{2b} \log\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^x \text{Ei}(-ax) \cos bx dx = -\frac{1}{b} \arctg \frac{b}{a}$$

$$\int_0^x \text{Ei}(-ax) \text{Si } bx dx = -\frac{1}{a} \arctg \frac{b}{a} + \frac{1}{2b} \log\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^{\infty} \text{Ei}(-ax) \text{Ci} bx dx = \frac{1}{b} \arctg \frac{b}{a} + \frac{1}{2a} \log \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$\int_0^{\infty} \text{Ei}(-ax) \text{Ei}(-bx) dx = \log \left\{ \frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} \right\}^{\frac{1}{ab}},$$

wo

$$\text{Si} x = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du; \quad \text{Ci} x = \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

H.

R. LIPSCHITZ. Sur l'intégrale  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos(a-b)x dx$

Darb. Bull. (2) V. 387-388. 1881.

Durch Einführung der imaginären Exponentialfunctionen in das Integral

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2 \cos x)^{a+b} \cos(a-b)x dx$$

und Integration der beiden einzelnen Glieder ergibt sich die von Cauchy gefundene Formel

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(1+a+b)}{\Gamma(1+a) \Gamma(1+b)}.$$

M.

C. B. S. CAVALLIN. Ett sätt att härleda och generalisera

Legendre's formel  $\int_0^{2\pi} p d\omega = L$ . Zeuthen T. (4) VI. 1-2.

Beweis der genannten Formel zur Berechnung der Länge einer geschlossenen convexen Curve, nebst der folgenden Erweiterung. Bezeichnet  $\psi$  für einen Punkt  $P$  der Curve das Gewicht der Längeneinheit,  $\rho$  den Krümmungsradius des Punktes,  $u$   $\omega$  wie in der obigen Formel den Winkel, welchen die Ser

ste vom Pole  $O$  auf die Tangente in  $P$  mit einer festen  $\rho$  bildet, so wird das Gewicht der Curve durch die Formel  $\int_0^{2\pi} \rho \psi d\omega$  ausgedrückt sein. Gm.

W. L. GLAISHER. Formulae for the  $r^{\text{th}}$  integral of a Legendrian coefficient and of the logarithm-integral. Mess. (2) XII 120-128.

I. Legendre'sche Coefficienten. Es wird eine Formel gegeben für

$$\left\{ \int_1^x dx \right\}^r P_n$$

gedrückt durch  $P_{n+r}, P_{n+r-2}, \dots P_{n-r}$ . Für  $r=3$  heisst die Formel z. B.

$$\int_1^x \int_1^x \int_1^x P_n dx dx dx = \frac{P_{n+3}}{(m+4)(m+2)m} - \frac{3P_{n+1}}{(m+4)m(m-2)} + \frac{3P_{n-1}}{(m+2)m(m-4)} - \frac{P_{n-3}}{m(m-2)(m-4)},$$

$$m = 2n+1.$$

II. Logarithmische Integrale. Die Formel, die Verallgemeinerung einer Bessel'schen Formel, lautet:

$$\left\{ \int_0^x dx \right\}^r x^m \text{li } x^n = \frac{x^{m+r}}{(m+1)(m+2)\dots(m+r)} \text{li } x^n - \frac{1}{m+1} \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \text{li } x^{m+n+1} + \frac{1}{m+2} \frac{x^{r-2}}{(r-2)! 1!} \text{li } x^{m+n+2} - \frac{1}{m+3} \frac{x^{r-3}}{(r-3)! 2!} \text{li } x^{m+n+3} + \dots + (-1)^r \frac{1}{m+r} \frac{1}{(r-1)!} \text{li } x^{m+n+r}.$$

Die Formel wird auch in symbolischer Form aufgestellt.

Glr. (O.).

BUCHHEIM and EVANS. Solutions of a question (6257). Ed. Times XXXVI. 75.

iebt, u. s. w. Zuletzt wird daraus die Gauss'sche Methode zur genährten Berechnung der bestimmten Integrale entwickelt.

Ty.

**MANSION.** Sur les cubatures approchées. Brux. S. sc. VI. B 228-232.

Man denke sich eine convexe Fläche, horizontal auf ein Parallelogramm  $abcd$  mit dem Mittelpunkt  $e$  und der Fläche  $B$  projicirt. Es mögen sein  $f, g, i, h$  die Mitten von  $ab, bc, cd, da$ ; weiter  $h_1, h_2, h_3, h_4, H, h_{12}, h_{23}, h_{34}, h_{41}$  die Höhen der Punkte  $B, C, D, E, F, G, H, J$  über der horizontalen Ebene, endlich

$$4h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4; \quad 4\eta = h_{12} + h_{23} + h_{34} + h_{41};$$

das Volumen  $abcdABCD$ . Dann hat man:

$$V = \frac{1}{3} B(2h + H), \quad \text{Fehler } \varepsilon < \frac{1}{3} B(H - h)$$

$$V = B\eta, \quad V = \frac{1}{3} B(2\eta + H).$$

Der Verfasser bestimmt auch den Fehler für die zweite und dritte Formel. Die zweite Formel ist neu, die beiden anderen sind schon von Wooley gegeben worden, aber ohne Bestimmung des Maximalfehlers.

Mn. (O.).

**MANSION.** Sur les quadratures et les cubatures approchées. C. R. XCV. 384-386.

Durch Figurbetrachtung wird gefunden: Das ebene Flächenstück zwischen einer Curve, welche der Abscissenaxe die concave Seite zugekehrt, dieser Axe und zwei Ordinaten ist ein Mittel zwischen dem Sehnepolygon für gleiche Sehnensprojections und demselben nach Substitution der zweiten und vorletzten Ordinate für die erste und letzte. Bei derselben Construction ist der Fehler der Simpson'schen Inhaltsformel kleiner als

$$\frac{1}{3} h(y_1 + y_{n-1} - y_1 - y_n),$$





**Vernon-Boys** gemacht, indem er die Bewegungen durch zwei **lenoide** reguliren lässt. H.

---

**ABDANK-ABAKANOWICZ.** Sur un nouvel intégromètre.  
C. R. XCIV. 1047-1049, (auch polnisch Ogniska).

Der vorgelegte, hier abgebildete und beschriebene Integrationsapparat ist wesentlich identisch mit dem vorgenannten. Es wird hervorgehoben, dass nirgends Gleitung stattfindet.

H.

Weitere Auswertungen bestimmter Integrale von D. EDWARDS, U. J. KNISLEY, T. R. TERRY, W. H. BLYTHE, B. EASTON, NASH, CH. LADD finden sich Ed. Times XXXVII. 29, 49, 57-58, 100.

O.

## Capitel 5.

### Gewöhnliche Differentialgleichungen.

**Nowotny.** Ueber die Lösungen der Differentialgleichungen. Pr. Jasto. (Galizien). (Polnisch).

Dn.

**E. West.** Exposé des méthodes en mathématiques, d'après Wronski. Résal J. (3) VIII. 19-54, 125-166.

Das Vorliegende handelt von der Integration der Differentialgleichungen und Differenzengleichungen, insbesondere für eine unabhängige Variable. Der Verfasser reducirt eine beliebige algebraische Gleichung zwischen  $x$ ,  $y$  und den Differentialquotienten bis zur  $n^{\text{ten}}$  Ordnung auf eine approximative, indem er für alle Factoren jedes Terms ausser einem Differentialquotienten



iete der Abel'schen Integrale auftretenden Probleme, die in neuen verallgemeinerten Fassung an Tiefe und Durchsichtigkeit zugleich gewinnen.

Zur Einleitung dient die Feststellung des Begriffs der Irreducibilität einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung. betreffende Definition, sowie die Irreducibilitätsuntersuchung linearen Differentialgleichungen (siehe das folgende Referat) den Inhalt des ersten Capitels. Die letztere Untersuchung

für die einfachsten linearen nicht homogenen Differentialgleichungen 2<sup>ter</sup> Ordnung mit der Auffindung der Bedingungen annehmen, unter denen das Integral einer durch ein Abel'sches Integral definirten Transcendenten durch eben diese Transcendente algebraisch ausdrückbar ist. Das 2<sup>e</sup> Capitel enthält die Darstellung und Begründung des vom Verfasser bereits im Jahre 1878 (Borchardt J. LXXXIV. p. 284, vgl. F. d. M. X. 1878. 243) veröffentlichten und in späteren Arbeiten erweiterten Fundamentalsatzes, der die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen und deren Ableitungen behauptet und die Basis bildet für die Ausdehnung des Abel'schen Satzes, sowie der Abel'schen Untersuchungen über die Relation von Integralen algebraischer Functionen auf Integrale linearer Differentialgleichungen. Es trifft hierbei der eigentümliche Umstand ein, dass der gedachte Satz selbst zugleich das Mittel bietet, die Form jener unveränderlichen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und ihren Ableitungen festzustellen. Auf die einfachste Form des Systems

$$\frac{dz}{dx} = y_k \quad (k = 1, \dots, \lambda)$$

angewandt, ergibt der Satz das Resultat, dass die einzig mögliche Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen die lineare mit constanten Coefficienten ist, während von den Integralen freie Teil eine algebraische Function von  $x$  dargestellt; hierbei gelten die Logarithmen algebraischer Functionen als Abel'sche Integrale. Besonders bemerkenswert für den Zusammenhang der Abel'schen Integrale mit anderen Transcendenten ist die weitere Feststellung, dass in eine algebraische







Differentialgleichung  $\frac{dz}{dx} = y$  ergibt sich hieraus die Zurückführung der algebraischen Reduction der Abel'schen Integrale auf ihre Integralgattungen (wo eine solche vorhanden ist, auf die rationale Reduction) wobei bemerkenswert ist, dass Abel, der die Zurückführung für die Reduction elliptischer und hyperelliptischer Integrale auf elliptische Integrale bewirkt hatte, schon die Ausdehnung dieses Verfahrens für den nächsten Fall der Reduction eines Abel'schen Integrals auf elliptische mit Schwierigkeiten verknüpft fand, die er nicht meinte überwinden zu können.

Wird das Reductionsproblem sogar für Integrale linearer Differentialgleichungen auf das rationale zurückgeführt. Mit näherem Eingehen wird die Frage der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische und hyperelliptische niedriger Ordnung beantwortet und an Beispielen erläutert. Zur vollständigen Lösung des Problems gehört ausser dem erwähnten Satze

eine Untersuchung der Irrationalitäten solcher Abel'scher Integrale, die linearen Differentialgleichungen genügen. Diesem Zweck ist der letzte Abschnitt dieses inhaltreichen Capitels gewidmet, der besonders lehrreich ist wegen des merkwürdigen Zusammenhangs dieser Frage mit der Theorie der complexen Multiplication einerseits und der Kreisteilungslehre andererseits. Die darin vorkommenden Entwicklungen zu charakterisiren, ist uns der folgende Satz heraus: „Die Differentialgleichung habe die Gestalt

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \dots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

wo  $y$  bei einem geschlossenen Umlaufe von  $x$ , für welchen die algebraischen Coefficienten  $Y$  unverändert bleiben, in  $\varepsilon y$  übergeht, wegen der Irreducibilität der algebraischen Function  $y$  eine  $m$ -te Wurzelswurzel sein muss. Unter der Voraussetzung, dass die gegebene Gleichung überhaupt kein Abel'sches Integral hat, kann eine lineare Differentialgleichung nur dann durch ein elliptisches Integral erster Gattung befriedigt werden, wenn der Integralmodul des elliptischen Integrals ein Modul der complexen Multiplication ist, sofern  $\varepsilon$  nicht  $= -1$  ist.“ Mit Hülfe dieses Satzes kann man









Ist  $n = 2$ , dann ist jedes Integral ein Quadrat eines Integrals einer Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung mit rationalen Coefficienten. Ist  $n > 2$ , dann sind die Integrale algebraische Functionen von  $x$ .“ Hierbei ergeben sich drei Fälle.

1) Die Klasse  $p$  der Gleichung (2) ist grösser als 1; dann ist die Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen Gleichung, der das allgemeine Integral von (1) genügt,  $\leq 4$ .

2)  $p = 1$ , dann ist diese Anzahl 2, 3, 4 oder 6.

3)  $p = 0$ , dann ist das allgemeine Integral von (1), abgesehen von der Wurzel einer rationalen Function als Factor, eine ganze homogene Function  $n^{\text{ten}}$  Grades des Fundamentalsystems von Integralen einer algebraisch integrierbaren linearen homogenen Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung mit rationalen Coefficienten in  $x$  ausdrückbar.

Da es an sich einleuchtend ist, dass jede algebraisch integrable Gleichung (1) die Eigenschaft hat, dass zwischen drei fundamentalintegralen eine Gleichung (2) besteht, so sind im Vorstehenden alle Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homogene Differentialgleichung 3<sup>ter</sup> Ordnung mit rationalen Coefficienten nur algebraische Integrale besitzt. Hr.

SAUVAGE. Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes. Ann. de l'Éc. Norm. (2) XI. 33-78.

Die Abhandlung des Herrn Fuchs über die linearen und homogenen Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung (1866) enthält die fundamentalen Principien der Theorie dieser Gleichungen. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, diese Theorie auf Systeme von Differentialgleichungen mit einer oder mehreren unabhängigen Variablen auszudehnen. Die beiden folgenden Capitel enthalten die Haupteigenschaften der Lösungen eines Systems totaler Differentialgleichungen von der Form:

$$= (a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n) dx_1 + \dots + (l_{11} y_1 + l_{12} y_2 + \dots + l_{1n} y_n) dx_p,$$

Die Factoren von  $z$  die zu bestimmenden Coefficienten sind, sonach rational durch  $z$ , die Coefficienten der Differenzung und die Ableitungen aller dieser Functionen auslassen. An diesen Satz knüpft der Verfasser einige Sätze an. Da die Grössen  $z, z' \dots$  in den Ausdrücken für die Coefficienten nur in den Verbindungen  $\frac{z'}{z}, \frac{z''}{z}, \dots$  vorkommen, und da  $\frac{z^{(k)}}{z}$  sich rational durch  $\frac{z'}{z}$  und dessen Ableitungen ausdrücken lässt, so gilt dasselbe auch für die Coefficienten in der in Rede stehenden algebraischen Gleichung. Ferner ist, wie aus dem Vorhergehenden leicht erhellt, die Coefficienten einer linearen homogenen Differentialgleichung  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung  $\mu$  Lösungen zu ihren logarithmischen Ableitungen  $\mu$  Ausdrücke von der Form

$$\varphi_1\left(x, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}\right), \dots, \varphi_\mu\left(x, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}\right)$$

auszuweisen, falls

$$y_1, y_2, \dots, y_m = z$$

ist, in  $x$  und den Wurzeln der algebraischen Gleichung  $\Phi(x) = 0$ , deren Coefficienten rationale Functionen von  $\frac{z'}{z}$ , den Ableitungen der gegebenen Differentialgleichungen und den Ableitungen dieser Grössen sind.

Hr.

GENS. Das Integral  $\int_a^b \frac{y dz}{x - z}$  und die linearen Differentialgleichungen. Klein Ann. XIX. 435-461.

Die vorliegende Untersuchung dient folgender Satz zum Ausgangspunkt: „Wenn  $y$  der Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$\varphi(z)y + \varphi_1(z) \frac{dy}{dz} + \dots + \varphi_n(z) \frac{d^n y}{dz^n} = 0$$

und man setzt in dem Ausdruck



verschwindet. Unter den Ergebnissen dieser Discussion heben wir hier das eine hervor, dass, falls  $\varphi_n(\alpha)$  von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung Null wird,  $P(x, z)$  für  $z = \alpha$  bei beliebiger Wahl von  $y$  verschwindet, wenn der reelle Teil jeder Wurzel der determinirenden Gleichung grösser als  $-1$  ist. Schliesslich wird noch der Fall  $\alpha = \infty$  betrachtet. (§§ 4, 5). Giebt es zwei singuläre Stellen  $z$ , für welche  $P(x, z)$  bei einem particulären Integral  $y$  verschwindet, und wählt man dieselben zu Grenzen, so fällt  $P$  für dieses Integral weg. Fehlt nun auch  $G$  für dasselbe Integral, dann besitzt die Differentialgleichung  $D(y) = 0$  ausser  $y$  noch ein zweites Integral in  $\sigma = \int_a^b \frac{y dz}{x-z}$ . Dies trifft bei der Differentialgleichung

für die Kugelfunctionen ein, welche die beiden Integrale

$$P_n(x) \text{ und } Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z) dz}{x-z}$$

hat. Die entwickelten Sätze liefern ferner ein bequemes Mittel, die vollständige Differentialgleichung  $D(y) = \text{Rat. } F(x)$  zu integrieren, insbesondere, wenn für die reducirte Gleichung  $G(x)$  fehlt, und mindestens eine singuläre Stelle  $z_1$  vorhanden ist, für welche  $P(x, z)$  bei beliebiger Wahl von  $y$  verschwindet. Wählt man z. B. dasjenige Integral  $y = f(x)$  von  $D(y) = 0$ , welches für  $x = a$  selbst seinen  $n-2$  ersten Ableitungen verschwindet, während die  $(n-1)^{\text{te}}$  den Wert  $\frac{1}{\varphi_n(a)}$  annimmt, so hat die Gleichung

$$D(y) = \frac{1}{x-a},$$

aus dem Obigen folgt, das Integral  $\sigma = \int_a^{z_1} \frac{f(z) dz}{x-z}$ . Den Schluss bildet die Ausführung der Rechnung an einem Beispiel (§§ 6. 7). Hr.

BOUSSINESQ. Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. C. R. XCIV. 208-210.

Ist  $\varphi(x, y) = c$  das allgemeine Integral der Gleichung

$y' = f(x, y)$ , so werden die Integrale, die der Verfasser „asptotes“ nennt, definiert durch die Gleichung  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \infty$ . Eben müssen im Falle eines Systems simultaner Differentialgleichungen falls  $\varphi(y_1, y_2, \dots, x) = c$  ein Integral desselben ist, für die asymptotischen Integrale die Bedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \dots = \infty$$

erfüllt sein.

Hr.

F. HOČEVAR. Zur Integration der Jacobi'schen Differentialgleichung  $Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0$ .

Wien. Ber. LXXXV. 848-864.

Die Gleichung

$$\frac{dx}{a_1x + b_1y + c_1 - x(a_2x + b_2y + c_2)} = \frac{dy}{a_2x + b_2y + c_2 - y(a_3x + b_3y + c_3)}$$

wird in der Form integriert:

$$\xi_1^{\lambda_1 - \lambda_2} \xi_2^{\lambda_2 - \lambda_3} \xi_3^{\lambda_3 - \lambda_1} = \text{const.},$$

wo zur Abkürzung

$$\xi_1 = \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1,$$

$$\xi_2 = \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2,$$

$$\xi_3 = \alpha_3x + \beta_3y + \gamma_3$$

gesetzt ist, und die drei Systeme der  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  durch Gleichungen

$$a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma = \lambda\alpha,$$

$$b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma = \lambda\beta,$$

$$c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma = \lambda\gamma$$

bestimmt werden. Es werden dann die Fälle betrachtet, wo Wurzeln  $\lambda$  conjugirt complex, und wo sie einander gleich sind. Das Integral ist algebraisch, wenn zwei Wurzeln conjugirt sind, die reellen Teile aller einander gleich sind. Sind alle Wurzeln einander gleich, so ergibt sich als Integral:

$$\frac{\xi'^1}{\xi} - \frac{\xi'^2}{\xi^2} = \text{const.},$$

wo  $\xi' = \frac{d\xi}{d\lambda}$ . Es folgt der Nachweis, dass die in den



steten Integralen auftretenden Constanten stets in endlicher  
 Form berechenbar sind, mit Anwendung des Satzes, dass, wenn  
 die Determinante Null ist, die Adjuncten zweier beliebiger  
 Zeilen einander proportionirt sind, woraus als neuer Satz herge-  
 leitet wird: „Die Determinante, welche aus einer Determinante  
 hervorgeht, indem man die Elemente der  $i^{\text{ten}}$  Colonne durch die  
 Adjunction der  $k^{\text{ten}}$  Zeile ersetzt, ist mit jener gleichzeitig Null.“

H.

---

W. L. GLAISHER. Examples illustrative of Cayley's  
 theory of singular solutions. Mess. (2) XII. 1-14.

Im Messenger (2) II. 6—12 (siehe F. d. M. IV. 1872. p. 148.)  
 hat Cayley die Theorie der singulären Lösungen der Differential-  
 gleichung  $\varphi(x, y, p) = 0$  betrachtet, wo  $\varphi$  eine rationale ganze  
 Function  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $p$  und einwertig in Bezug auf  $x$  und  $y$   
 ist. Im Messenger (2) VI. 23—27 (s. F. d. M. VIII. 1876. p. 185) hat  
 er dann den speciellen Fall  $n = 2$  betrachtet. Herr Glaisher  
 recapitulirt die allgemeine Theorie, aus der folgt, dass, wenn  
 $p^2 + 2Mp + N = 0$  die Differentialgleichung ist, und die Inte-  
 ralgleichung  $Pc^2 + 2Qc + R = 0$  ein System von algebraischen  
 Curven darstellt, die singuläre Lösung  $LN - M^2 = 0$  die Cusp.  
 und den Tac.-locus giebt und die singuläre Lösung  $PR - Q^2 = 0$   
 den Cusp.- und den Node-locus giebt. Diese Theorie wird an  
 1 Beispielen erläutert. Glr. (O.).

---

V. P. WORKMAN. On tac-loci. Mess. (2) XII. 21-25.

Dieser Aufsatz bezieht sich auf die vorstehende Arbeit. Der  
 Verfasser giebt eine Relation zwischen dem Tac-locus und der  
 Integralgleichung, mit deren Hülfe gewisse von Cayley ohne  
 Beweis mitgeteilte Resultate bewiesen werden. Es wird auch  
 bewiesen, dass wenn  $r$  der Grad der Gleichung in  $c$  ist, der  
 Tac-locus  $r(r-1)$  Mal vorkommt. Glr. (O.).



t vorstehende Gleichung in die lineare Differentialgleichung  
Ordnung

$$\varphi_0^2 f_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi_0 f_1 \frac{dv}{dx} + f_2 v = 0$$

r, worin die  $f$  ganze Functionen in  $x$  sind, falls die  $\varphi$  als  
he vorausgesetzt werden. Zweck der Note ist der Nachweis,  
die letzte Gleichung durch die Substitution

$$v = we^{\int \frac{G dx}{\varphi_0}}$$

n  $G$  eine passend zu bestimmende Function  $(n-1)^{\text{ten}}$  Grades  
setzt, falls  $\varphi_0$  vom  $n^{\text{ten}}$  Grade ist, stets in eine solche Diffe-  
differentialgleichung übergeführt werden kann, deren linke Seite den  
or  $\varphi_0(x)$  ausscheiden lässt, wodurch der Grad der Coeffi-  
en um den Grad von  $\varphi_0$  erniedrigt wird. Diese Trans-  
formation wird auf die Gleichung

$$(a+bx+cx^2) \frac{dy}{dx} + Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ewandt, welche durch die ersterwähnte Substitution in die  
Gleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung

$$(a+bx+cx^2)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + (a+bx+cx^2) (a_1 + b_1 x) \frac{dv}{dx} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2) v = 0$$

geht, und es wird gezeigt, dass ihre Integration, wie übrigens  
erweitig bekannt, von der Differentialgleichung der hyper-  
metrischen Reihe abhängig ist. Hr.

HEYMANN. Zur Integration der Differentialgleichungen.  
Schlömilch Z. XXVII. 1-41.

In einer früheren Arbeit (Schlömilch Z. XXIV. 252 ff.; siehe  
M. XI. 1879. p. 225 f.) hatte der Verfasser zur Integration  
sser Differentialgleichungen erster Ordnung  $f(x, y, y') = 0$  die  
stitution  $x = \frac{dv}{du}$ ,  $y = u \frac{dv}{du} - v$  mit Vorteil verwendet.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergibt dasselbe



Differentialgleichung anwenden. Sodann wird untersucht, in welchen Fällen die Differentialgleichung  $Mdy + Ndx = 0$  auf den betrachteten Fall, dass  $M$  von  $y$  unabhängig ist, reducirt werden kann. Damit die Substitution  $x = \alpha y + u$  dies leiste, sind zwei Bedingungen von den Coefficienten von  $M$  und  $N$  zu erfüllen, und zwar dieselben, die erforderlich sind, damit zwei parallele Gerade der Differentialgleichung particulär genügen. Führt man homogene Coordinaten ein, so besitzt die Gleichung in dem betrachteten speciellen Falle drei in einem Punkte sich schneidende Gerade als particuläre Integrale. Diese Eigenschaft ist umgekehrt die Specialität charakteristisch. Hieran wird die Frage gestellt, ob die Integration auch dann geleistet werden kann, wenn sich die drei particulären Geraden nicht in einem Punkte schneiden; jedoch bereits in einem ganz speciellen Falle ist man in der Lage, zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzusteigen.

Schliesslich werden einige Fälle, nämlich:

$$+(\alpha xy + \beta y + \gamma) dx = 0, \quad 2xy dy - (y^2 + \alpha xy + 2\beta x - \gamma y) dx = 0$$

der Fall, dass  $M$  in  $x, y$  linear ist, mittels quadratischer Substitutionen erledigt. T.

G. IMSCHENETZKY. Erweiterung der Euler'schen Methode, alle Fälle zu bestimmen, in welchen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von gewisser Art sich integrieren lässt, auf lineare Differentialgleichungen im Allgemeinen. St. Petersburg.

Hat man eine lineare Differentialgleichung

$$L = py + qy' + ry'' + sy''' + \dots + uy^{(n-1)} + vy^{(n)} = w,$$

$p, q, r, s, \dots, u, v$  die gegebenen Functionen von  $x$  sind, so kann man sie durch partielle Integration nach Multiplication derselben mit  $dx$  auf folgende Form bringen:

$$\int (p)y dx + (q)y + (r)y' + \dots + (u)y^{(n-2)} + vy^{(n-1)} = \int w dx + \text{const.},$$

zur Abkürzung



ebene  $L = 0$  durch denselben Process entstehen konnte, er für die 2<sup>te</sup> Ordnung die Integration einer linearen Differentialgleichung 1<sup>ter</sup> Ordnung verlangt, wodurch dieser Rückwärtiger vorteilhaft wird, als der directe Gang. Wird nun eine von dieser Reihe von Gleichungen integrabel, so es auch die anderen.

erstes Beispiel für die Methode wird die Euler'sche Gleichung:

$$aX''y + bX'y' + Xy'' = 0,$$

$$X = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

nehmen.

Es wird die Bemerkung gemacht, dass die Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} D^n(x^2 - 1),$$

man dem Rodrigues und Ivory zuzuschreiben pflegt, schon ein particuläres Integral in der Euler'schen Formel:

$$P_n(x) = c' D^n(x^2 - 1)$$

ist. Vergleicht man die Euler'sche Methode mit der von Liouville (Methode der Integration durch Differentiiren mit beliebigem Ordnungsindex), so findet man, dass, obschon sie für die betrachteten Gleichungen in der von Liouville enthalten scheint, ihr doch, da sie auch auf lineare Differentialgleichungen überhaupt ausdehnbar ist, eine selbständige Bedeutung zuzuschreiben ist. Nach dem erwähnten Beispiele folgen noch andere.

Ty.

ENCARÉ. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCIV. 6, 1038-1040, 1166-1167.

Die erste Note enthält die Angabe einer neuen Methode, eine Fuchs'sche Function durch Theta-Fuchs'sche Reihen zu entwickeln. Dieselbe wird an der besondern Function ausgesetzt, die sich ergibt, wenn man  $x$  als Function des Logarithmus zweier Integrale der Gleichung









alisch ist, zwischen zweien ihrer Integrale eine algebraische Beziehung mit constanten Coefficienten besteht. Im Vorliegenden die Umkehrung des Satzes bewiesen: Besteht zwischen zwei unabhängigen Integralen von (1) eine algebraische Beziehung, so ist das allgemeine Integral eine algebraische Function von  $x$ . Eine Ausnahme tritt ein, wenn der Ausdruck

$$\frac{\left(2ab - \frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$$

unabhängig ist. In diesem Falle lässt sich die Integration der Differentialgleichung auf Quadraturen zurückführen. Die angewandte Methode zeigt übrigens, dass man jedes Mal, wenn eine Beziehung, algebraisch oder nicht, zwischen zwei verschiedenen Integralen der Gleichung bekannt ist, das allgemeine Integral durch Differentiationen und Eliminationen erhalten kann.

Hr.

---

PEPIN. Méthode pour obtenir les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires du second ordre. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXIV. 243-389.

Die Frage, unter welchen Bedingungen eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nur algebraische Integrale habe, ist bekanntlich zuerst von Herrn Fuchs in der wichtigen Abhandlung in Schlegel's J. LXXXI. p. 97 (siehe F. d. M. VII. 1875. 172) erledigt worden. Herr Pepin, der dieselbe Aufgabe früher in seiner in Tortolini's Ann. 1863 veröffentlichten Abhandlung gelöst zu haben glaubte, war darin, dass Herr Fuchs gelegentlich einer von Herrn Pepin erhobenen Einwendung nachwies, zu falschen Resultaten gelangt, die dieser in Briochi's Ann. 1877 rectificirt hat (siehe F. d. M. VIII. p. 188, X. 1878. 228). In der vorliegenden umfangreichen Abhandlung nimmt der Verfasser den inzwischen mehrfach behandelten Gegenstand wieder auf, mit dem Bemerkten, dass die verschiedenen Methoden zur Lösung des Problems, die er übrigens







Die Differentialquotienten von  $u$  vermöge der algebraischen Relationen ihre Ausdrücke durch  $u$  substituirt. Der Umstand, dass die resultirende algebraische Gleichung für  $u$  die ursprüngliche irreductible Gleichung als Factor enthalten muss, ergibt eine Anzahl von Bedingungsgleichungen, die  $p, q$  und deren Ableitungen enthalten und durch passende Umformungen in allen Fällen auf die einzige Bedingung zurückgeführt werden, dass die nicht lineare Differentialgleichung 3<sup>ter</sup> Ordnung durch eine rationale Function genügt werde. Mit dieser Function stehen  $p$  und  $q$  in einfacher Verbindung.

Von der entwickelten Methode wird im 3<sup>ten</sup> Theile eine interessante Anwendung auf die Untersuchung der algebraischen Functionen gemacht, deren Entwicklung durch eine hypergeometrische Reihe gegeben ist. Die Resultate stimmen mit den von Schwarz (Borchardt's J. LXXV. 292, s. F. d. M. V. 1873. 249) unabhängig verschiedenem Wege gefundenen überein. Hr.

CARD. Sur les formes des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. C. R. XCIV. 418-421.

Die betrachteten Differentialgleichungen sind von der Form:

$$(1) \quad x^\mu \frac{d^2 u}{dx^2} + x F(x, y) \frac{du}{dx} + F_1(x, y) u = 0,$$

wo  $\mu$  eine beliebige Constante) und  $F$  und  $F_1$  Functionen von  $x$  und  $y$  bezeichnen, die in der Umgebung von  $x = 0$  für jeden Wert von  $y$  eindeutig und stetig sind. Es handelt sich um die Ermittlung der Form der Integrale von (1) in der Umgebung von  $x = 0$ . Die angewandte Methode besteht darin, die gewöhnliche Differentialgleichung (1) ein passendes System linearer Differentialgleichungen zu substituiren. In der Voraussetzung, dass  $\mu - 1$  nicht eine reelle negative Grösse ist, und dass  $\mu$  nicht auf die Form  $n + m(\mu - 1)$  ( $n$  und  $m$  ganze positive Zahlen) gebracht werden kann, lautet die gesuchte Form der Integrale:

$$x^{\alpha_1} P_1(x, x^{\mu-1}), x^{\alpha_2} P_2(x, x^{\mu-1}),$$





RIOSCHI. Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari. Rom. Acc. L. (3) VI. 42-47.

Aus der linearen Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung

$$y'' + py' + qy = 0$$

in lineare Gleichungen höherer Ordnung abgeleitet, indem eine neue Variable  $z$ , deren Beziehung zu  $x$  durch eine Gleichung gegeben ist, eingeführt wird. Setzt man nun

$$e^{\int p dx} z' = \varphi(z), \quad q : z'^2 = \psi(z),$$

combinirt diese Gleichungen mehrmals nach  $x$  und combinirt auf derselben Weise die Resultate, so gelangt man zu linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung in  $z$ , von denen der Verfasser folgende zwei aufstellt:

$$1) \quad z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + l_0 q)z' + l_1(q' + 2pq)z = 0,$$

$$2) \quad \begin{cases} z^{IV} + 6pz''' + (4p' + 11p^2 + l_0 q)z'' \\ + [p'' + 7pp' + 6p^3 + l_0 pq + l_1(q' + 2pq)]z' \\ + l_2[(q' + 2pq)' + 3p(q' + 2pq)]z + l_3 q' z = 0, \end{cases}$$

wo die  $l$  numerische Coefficienten bedeuten, unter der Annahme, dass zwischen  $\varphi(z)$  und  $\psi(z)$  folgende Relationen bestehen:

$$\text{für (1)} \quad b(z) + l_0 \psi(z) + l_1 z \alpha(z) = 0,$$

$$\text{" (2)} \quad c(z) + l_0 \psi(z) \alpha(z) + l_1 \alpha(z) + l_2 \beta(z) z + l_3 \psi^2(z) z = 0,$$

$$\alpha(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \quad b(z) = \alpha'(z) + 2\alpha^2(z),$$

$$c(z) = b'(z) + 3b(z)\alpha(z), \quad \alpha(z) = \psi'(z) + 2\psi(z)\alpha(z),$$

$$\beta(z) = \alpha'(z) + 3\alpha(z)\alpha(z).$$

Für  $l_0 = 4, l_1 = 2$  stellt 1) die Gleichung dar, der das Product der Fundamentalintegrale der ursprünglichen Gleichung genügt; für  $l_0 = 10, l_1 = 10, l_2 = 3, l_3 = 9$  wird 2) durch eine cubische Gleichung der Fundamentalintegrale der ursprünglichen Gleichung dargestellt. Die Resultate werden dazu angewandt, um die linearen Differentialgleichungen abzuleiten, denen bei den Transformationen



der übrigen  $n$ , so bestimmen sich die  $S$  successive durch die rekurren-  
te Formel

$$(n+1) S_{m,n+1} = S'_{m,n} + np S_{m,n} + (m-n+1)q S_{m,n-1}$$

Verbindung mit den Anfangsgleichungen  $S_{m,0} = z$ ,  $S_{m,1} = z'$ .  
Daraus erhellt, dass  $S_{m,n}$  von der Form

$$S_{m,n} = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z$$

worin die  $a$  rationale Functionen von  $p$ ,  $q$  und ihren Ablei-  
tungen bedeuten.  $z$  selbst genügt der Differentialgleichung  
1<sup>ter</sup> Ordnung:

$$S'_{m,m} + pm S_{m,m} + q S_{m,m-1} = 0.$$

logarithmischen Ableitungen  $\frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}$  sind Wurzeln der  
Gleichung  $m^{\text{ten}}$  Grades

$$(1) \quad S_{m,0} t^m - S_{m,1} t^{m-1} + \dots \pm S_{m,m-1} t \mp S_{m,m} = 0.$$

Für den hiervon gemachten Anwendungen heben wir folgende  
an. Es wird vorausgesetzt, dass  $p = 0$ , und die Summe der  
Potenzen zweier particulärer Lösungen  $y_1^m + y_2^m$  constant sei.  
Dann erhält man für  $y_1, y_2$  die Werte

$$\left\{ \sqrt[m]{a} \pm \sqrt[m]{a - \frac{4}{m-1} \xi^m} \right\}^{\frac{1}{m}},$$

in  $a$  eine willkürliche Constante und  $q = \xi^{m-2}$  gesetzt ist.  
Andererseits kann man  $y_1^m + y_2^m$  in der Form eines Products der  
particulärlösungen

$$(y_1 - \varepsilon_1 y_2) (y_1 - \varepsilon_2 y_2) \dots (y_1 - \varepsilon_m y_2) = z$$

stellen, worin die  $\varepsilon$  die  $m^{\text{ten}}$  Wurzeln von  $-1$  sind. Die  
Wurzeln der algebraischen Gleichung (1) sind demnach

$$t_r = \frac{y'_1 - \varepsilon_r y'_2}{y_1 - \varepsilon_r y_2},$$

vermöge der bekannten Ausdrücke für  $y_1$  und  $y_2$  angebbar.  
Dieser ist in den betrachteten Fällen  $S_{m,0} = 1$ ,  $S_{m,1} = 0$ .  
Die anderen Coefficienten der Gleichung (1) lassen sich durch  
 $S_{m,2}, S_{m,3}$  rational ausdrücken. Da die  $t_r$  sich durch eben  
so viele Grössen als Wurzelfunctionen darstellen lassen, so ist auf  
diese Weise eine Klasse von algebraischen Gleichungen  $m^{\text{ten}}$  Grades



beit des Herrn Fuchs). In dem speciellen Falle, dass  $p = 0$ ,  $= 0$  und über  $r$  so verfügt wird, dass das Product constant wird, lässt sich das allgemeine Integral durch Wurzelgrößen ausdrücken. Hr.

. Besso. Sopra una classe d'equazioni del sesto grado risolubili per serie ipergeometriche. Rom. Acc. L. Mem. XIV.

ASORATI e BELTRAMI. Relazione. Rom. Acc. L. (3) VI. 226.

Die Resultate der im Vorhergehenden besprochenen Arbeit werden durch die Annahme  $m = 6$  specialisirt. Ist

$$y'' + qy = 0$$

die Differentialgleichung von der Eigenschaft, dass das Product aus sechs ihrer particulären Integrale constant ist, dann lautet die Gleichung, welche die logarithmischen Ableitungen dieser Lösungen zu Wurzeln hat:

$$t^6 + S_2 t^4 - S_3 t^3 - \frac{1}{5} S_2^2 t^2 + \frac{1}{25} S_2 S_3 - \left( \frac{1}{50} S_3^2 + \frac{1}{125} S_2^3 \right) = 0.$$

Die Differentialgleichung kann in dem betrachteten Falle mittelst einfacher Substitutionen in eine hypergeometrische transformirt werden, und die Wurzeln  $t_r$  werden durch die Formel gegeben:

$$t_r = \frac{12}{\sqrt{5}} \sqrt[6]{a} \cdot \xi^{\frac{2}{3}} (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \frac{c_r \varphi'_1(\xi) + \varphi'_2(\xi)}{c_r \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)},$$

worin die  $\varphi$  und ihre ersten Ableitungen mittelst hypergeometrischer Reihen sich ausdrücken:

$$\xi = \frac{64 S_2^3}{135 S_3^2 + 64 S_2^3}, \quad a = \frac{1}{135} (135 S_3^2 + 64 S_2^3),$$

$$c_r = - \frac{1 + \mu_r(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{4 \mu_r \cos \frac{\pi}{24}},$$

und wo die  $\mu_r$  die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^6 + 5\mu^4 + 5\mu^2 - 1 = 0$$

sind. Bemerkenswert hierbei ist die Methode der Bestimmung der Constanten  $c_r$ , zu der die Ermittlung der Grenzwerte der  $\xi$  für  $\xi = 0$  und  $\xi = 1$  notwendig ist. Hr.

BELTRAMI e RAZZABONI. Sopra la memoria del prof. D. Besso intitolata: Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari. Rom., Acc. L. (3) VI. 12.

J. C. MALET. On a class of invariants. Phil. Trans. CLXXIII. 751-756.

Der Verfasser betrachtet zwei Klassen von Invarianten einer Differentialgleichung, nämlich  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2P_1 \frac{dy}{dx} + P_2 y = 0$ . Man hat erstens, entsprechend einem Wechsel der abhängigen Variablen  $y$ , eine Invariante  $P_2 - P_1^2 - \frac{dP_1}{dx}$ , d. h., schreibt man  $z(x)$  für  $y$ , so ist die in  $z$  transformirte Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2Q_1 \frac{dz}{dx} + Q_2 z = 0,$$

wo die Functionen  $Q_1$  und  $Q_2$  so beschaffen sind, dass identisch

$$Q_2 - Q_1^2 - \frac{dQ_1}{dx} = P_2 - P_1^2 - \frac{dP_1}{dx}.$$

Zweitens hat man entsprechend dem Wechsel der unabhängigen Variablen eine Invariante  $P_2^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{dP_2}{dx} + 4P_1 P_2 \right)$ , d. h., schreibt man  $\varphi(t)$  für  $x$ , so ist die transformirte Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2Q_1 \frac{dy}{dt} + Q_2 y = 0.$$

Dann sind  $Q_1$  und  $Q_2$  solche Functionen, dass die identische Gleichung

$$Q_2^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{dQ_2}{dx} + 4Q_1 Q_2 \right) = P_2^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{dP_2}{dx} + 4P_1 P_2 \right)$$

gilt.

Cly. (0.).

H. CURTIS, R. RAWSON. Solutions of a question (6780).  
 Id. Times XXXVI. 68-70.

Boole hat bewiesen, dass die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2Q \frac{du}{dx} + \left\{ Q^2 + \frac{dQ}{dx} \pm c^2 - \frac{m(m+1)}{x^2} \right\} u = 0$$

in der Diff. Equ. p. 459) in endlicher Form integriert werden kann, wo  $Q$  eine Function von  $x$  ist. Hier wird das erweitert auf:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 2Q \frac{du}{dx} + \left\{ Q^2 + \frac{dQ}{dx} + Ax^r + \frac{(m-r)(m+r+4)}{4(m+2)^2x^2} \right\} u = 0,$$

$A$  constant,  $(2p+1)m = -4p$ ,  $p$  eine ganze Zahl ist.

0.

PFANNENSTIEL. Bidrag till de liniära differential-  
 equationernas teori. Goteborg Handl. 1882. 1-50.

Diese Abhandlung ist hauptsächlich einer Untersuchung der  
 Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sum k_r x^r}{(x^2 - a^2)^2} y$$

beantwortet, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Inte-  
 gral von der Form

$$y = Ae^{\varphi(x)} + Be^{-\varphi(x)}$$

Besonders werden die Specialfälle  $\nu = 2$  und  $\nu = 4$  be-  
 handelt. Der Verfasser referirt auch über die Methode, die Herr  
 Magnusson angegeben hat, um die Differentialgleichung

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (b_0 + b_1x) \frac{dy}{dx} + c_0y = 0$$

zu integrieren (siehe: Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar  
 Bd 5 und 7), und wendet diese Methode an, um die Gleichung  
 in Normalform zu transformieren. Schliesslich fügt der Verfasser noch  
 hinzu über die Differentialgleichungen dritter Ordnung,  
 ein Integral von der Form

$$y = Ae^{\varphi(x)} + Be^{-\varphi(x)} + C\psi(x)$$

anzunehmen. Referent kann nicht umhin zu bemerken, dass ihm die





1. Die Arbeit zerfällt in acht Teile. Im ersten Abschnitt werden sechs particuläre Integrale der Gleichung (1) hergeleitet, die Beziehungen zwischen ihnen geprüft. Wenn  $p$  keine ganze Zahl, so dehnt sich jedes derselben in's Unendliche aus, im andern Fall sind zwei der Reihen begrenzt. Es giebt dann aber  $i$  particuläre Integrale, deren jedes eine endliche Zahl von Termen hat. Sie entstehen dadurch, dass die Zähler der Coefficienten Null als Factor enthalten. Wenn die Reihe fortgesetzt wird, treten Factoren Null in die Nenner, und die Reihe muss dann als wieder beginnend und in's Unendliche sich erstreckend betrachtet werden. Jedenfalls aber genügt der endliche Teil der Differentialgleichung. Es ist daher naturgemäss, sich mit der Betrachtung dieses Teiles zu begnügen.

Der zweite Teil enthält eine neue Form der Lösung in (1) im Fall, dass  $p$  eine ganze Zahl ist. Ist  $p = i$  eine positive ganze Zahl, so genügt der Coefficient von  $h^{i+1}$  in der Entwicklung von  $e^{a\sqrt{x^2+2xh}}$  nach steigenden Potenzen von  $h$ .

Der dritte Teil enthält die sechs particulären Integrale von (1) und (4), die denen von (1) entsprechen. Der vierte Abschnitt bezieht sich auf die speciellen Fälle, in denen die Gleichungen eine Integration in endlicher Form zulassen. Wenn eine Differentialgleichung durch eine unendliche Reihe befriedigt wird, wenn die Reihe für gewisse Werte einer in ihr enthaltenen Grösse endet, dann kann das Integral in verschiedener Form gestellt werden, indem man die endliche Reihe am andern Ende anfängt, und die Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt. Der fünfte Abschnitt enthält die Auswertung der bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x^m - a^2 x^{-m}} dx, \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2 + x^2)^n} dx,$$

in denen  $m$  eine reelle und  $n$  eine positive Grösse ist, und zwar wenn  $m$

der Form  $\frac{2i+1}{-4i}$  und  $n$  eine positive ganze Zahl ist. Die allge-

meinen Formeln möchten wohl neu sein. Die Integrale genügen Differentialgleichungen der Form (4) und (1), so dass ihre Werte mit



Integrale, die sich sofort auf bestimmte einfache Integrale zurückführen lassen. Dieselben haben die Formen

$$u = C \int \frac{(\xi^2 - 1)^n}{(x - \xi)^{n+1}} d\xi \quad \text{und} \quad u = c \int \frac{(x - \xi)^n}{(1 - \xi^2)^{n+1}} d\xi,$$

teils über geschlossene, die singulären Punkte  $\pm 1, x, \infty$  umkreisende Linien, teils zwischen den Grenzen  $\pm 1, \pm \infty, \pm \infty i$  genommen werden. Die mannichfaltigen Lösungen werden für beliebige  $n$  discutirt, für den Fall eines ganzzahligen  $n$  ihr Zusammenhang mit den bekannten Functionen  $P_n(x)$  und  $Q_n(x)$  daran und die Eigenschaften dieser aus der Form des bestimmten Integrals abgeleitet. Wir bemerken übrigens, dass Herr Löffli in seiner Schrift „Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen mit beliebigem Parameter etc.“ Bern. 1881, diese Functionen durch dieselben beiden Integralformen dargestellt hat. (J. F. d. M. XIII. 1881. 395).

Hr.

6. STEEN. Integration af en lineär Differentialligning af anden Orden. Kjob. Skrift. (6) I. 333-345.

Die Integrale der beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' + c y &= 0, \\ v'' + (a \cot x - b \operatorname{tg} x) v' + c v &= 0 \end{aligned}$$

siehe nach den vom Verfasser in Darb. Bull. 1881. p. 30-36 gegebenen Entwicklungen zu einander in einer solchen Beziehung,

$$\begin{aligned} y &= v' \sin^a x \cos^b x, \\ v &= y' \sin^{-a} x \cos^{-b} x. \end{aligned}$$

Gewisse Specialfälle der erwähnten Gleichungen sind leicht integrabel, andere lassen sich durch bestimmte Integrale integrieren. Namentlich wird gezeigt, dass die Gleichung

$$y'' - (a \cot x - b \operatorname{tg} x) y' - 2p(a + b - 2p)y = 0$$

für  $p > 1$  und  $b > 2p - 1$  das folgende Integral hat:

$$y = \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x - \alpha)^p (1 + \alpha)^{\frac{1}{2}(b - 2p - 1)} (1 - \alpha)^{\frac{1}{2}(a - 2p - 1)} d\alpha,$$



setzen ist, durch Abzug eines endlichen Ausdrucks auf das Integral eines binomischen Differentials reduciren, welches unter gewissen Voraussetzungen betreffs  $\beta$  und  $\gamma$  durch Logarithmen und Kreisfunctionen in endlicher Form dargestellt werden kann. Der Schluss bildet die Untersuchung, in welchen Fällen die Function  $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2 \varphi)$  in Beziehung auf  $\varphi$  die Periode  $2\pi$  hat.  
Hr.

GOURSAT. Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. C. R. XCV. 717-719.

Der Verfasser betrachtet die von Herr Appell eingeführte hypergeometrische Reihe analog gebildete Function zweier Veränderlicher (C. R. XC. 296, 731, 977, vgl. F. d. M. XII. 1880. 296):

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n) (\beta, m) (\beta', n)}{\gamma, (m+n) (1, m) (1, n)} x^m y^n,$$

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+k-1), (\lambda, 0) = 1,$$

und bemerkt, dass die zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen, denen sie genügt, im Allgemeinen 60 gemeinsame Integrale haben von der Form:

$$x^l (1-x)^m y^{l'} (1-y)^{m'} (x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, l; l'),$$

worin  $\lambda, \mu, \mu', \nu$  mit  $\alpha, \beta, \beta', \gamma$  in einfacher Beziehung stehen und  $l, l'$  rationale Functionen des ersten Grades von  $x$  und  $y$  sind.

Der Beweis ist demjenigen von Jacobi für die hypergeometrischen Reihen einer Veränderlichen in Crelle's J. LVI. gegebenen nachgebildet und nimmt das von Herrn Picard als Lösung für die partiellen Differentialgleichungen aufgestellte Integral

$$\int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma} (u-1)^{\gamma-\alpha-1} (u-x)^{-\beta} (u-y)^{-\beta'} du$$

(C. R. XC. 1119. Ann. de l'Éc. N. (2) X. vgl. F. d. M. XII. 1880. 328) zum Ausgangspunkt, worin  $g$  und  $h$  zwei der fünf Grössen  $1, x, y, \infty$  bezeichnen. Jedes dieser zehn Integrale wird auf









Differentialgleichung 2<sup>ter</sup> Ordnung, deren Integrale die beiden in einer quadratischen Gleichung in  $y$ , resp.  $y^{(n)}$  sind.

Hr.

ESCHERICH. Ueber die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen.

n. Denkschr. XLVI. 61-82.

und

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0; \quad f = b_0 y^{(m)} + b_1 y^{(m-1)} + \dots + b_m y = 0$$

homogene Differentialgleichungen  $n^{\text{ter}}$  und  $m^{\text{ter}}$  Ordnung in  $x$  und  $y$ , so erhält man unmittelbar in dem Verschwinden der Determinante  $R$  des nach  $y, y', \dots, y^{(m+n-1)}$  linearen Systems  $n+m$  Gleichungen

$$F = 0, \dots, F^{(m-1)} = 0; \quad f = 0, f' = 0, \dots, f^{(n-1)} = 0$$

notwendige Bedingung, dass die beiden gegebenen Differentialgleichungen ein particuläres Integral gemeinsam haben. Diese Bedingung auch hinreichend ist, wird aus der Umformung von  $R$  in

$$R = a_0^m e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \Sigma \pm f(y_1) f'(y_2) \dots f^{(n-1)}(y_n)$$

ausgedr., wo  $y_1, \dots, y_n$  ein Fundamentalsystem particulärer Integrale von  $F = 0$  darstellen. Aus dem Verschwinden der Functionendeterminante folgt nämlich, dass die  $f$  von einander linear unabhängig sind, also die Gleichung besteht:

$$c_1 f(y_1) + c_2 f(y_2) + \dots + c_n f(y_n) = f(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n).$$

Das Integral  $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$  der Gleichung  $F = 0$  genügt daher auch der Gleichung  $f = 0$ . Die Bedingung für das gemeinsame Vorhandensein von  $k$ , und nur  $k$  gemeinsamen Integralen wird durch das simultane Verschwinden der Grössen:

$$\frac{\partial^\mu R}{[\partial a_n^{(m-\mu)}]^i [\partial a_{n-1}^{(m-\mu)}]^{u-i}} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, \mu \\ \mu = 0, 1, \dots, k-1. \end{matrix}$$

ohne dass eine dieser Grössen für  $\mu = k$  verschwindet. Die eingeclammerten Indices bedeuten Differentiationsindices. Die Gleichung der gemeinsamen Integrale lautet dann







POINCARÉ. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. C. R. XCIV. 577-579.

Es handelt sich um die Möglichkeit, jedes System simultaner linearer Differentialgleichungen durch Reihen zu integrieren, für alle reellen Werte der Variablen convergiren. Man kann solches System auf die Form bringen:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n},$$

$X_1, \dots, X_n$  ganze Polynome in  $x_1, \dots, x_n$  sind. Führt man eine Hilfsvariable  $s$  ein, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx_k}{X_k} = \frac{ds}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}$$

bestimmt ist, so lässt sich, wie der Verfasser ohne Beweis mittheilt, stets eine Zahl  $\alpha$  der Art finden, dass  $x_1, \dots, x_n$  in Reihen entwickelt nach Potenzen von  $(e^{\alpha s} - 1) : (e^{\alpha s} + 1)$  dargestellt werden können, die für alle reellen Werte von  $s$  convergiren. Die Coefficienten sind rationale Functionen der Zahl  $\alpha$ , der Coefficienten der Polynome  $X$  und der Anfangswerte der Variablen, dass für reelle  $s$  auch die Werte für die  $x$  reell werden. Eine besondere Wichtigkeit hat der Satz in den Anwendungen auf die Differentialgleichungen der Mechanik, da hiernach die Reihen für die Variablen des Systems für alle reellen Werte der Zeit convergiren würden.

Hr.

J. SYLVESTER. On a certain integrable class of differential and finite difference equations. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Mittheilung des Verfassers über eine particuläre Lösung einer gewissen Klasse von Differenzen- und Differentialgleichungen, worüber in dem vorigen Bande dieses Jahrbuches p. 287 berichtet ist.

Hr.

J. SYLVESTER. Note on the theory of simultaneous linear differential or difference equations with constant coefficients. Sylv., Am. J. IV. 321-327.



$r \neq \infty$  einer festen Grenze. Sind sie imaginär und so, dass  $= e^i$ , was erfordert, dass  $(a+\beta)^2 = 4(a\beta - \alpha b) \cos\left(\frac{\lambda\pi}{i}\right)^2$  einen ganzzahligen Wert von  $\lambda$  ist, dann ist  $\varphi^i(x) = x$ . In ähnlicher Weise lassen sich die analogen Fragen bei Substitutionen höherer Ordnung behandeln, was aber nicht näher ausführt wird. Hr.

## Capitel 6.

### Partielle Differentialgleichungen.

**3. RIEMANN.** Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen, herausgegeben von Karl Hattendorf. 3<sup>te</sup> Aufl. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Diese neue Auflage ist ein einfacher, im Einzelnen durchgesehener Abdruck der zweiten Auflage des bekannten Werkes. T.

**S. LIE.** Untersuchungen über Differentialgleichungen. 1. Christiania Forh. 1882. No. 21, 1-12.

Diese Note zerfällt in mehrere Teile. Zuerst werden alle Flächen bestimmt, deren Haupttangentencurven (des einen Systems oder beider Systeme) linearen Liniencomplexen angehören. Dieses interessante Problem deckt sich im Uebrigen mit der Bestimmung aller Flächen mit sphärischen Krümmungslinien. Es wird dann versucht nachzuweisen, dass alle Flächen, die aus einer vorgelegten Fläche constanter Krümmung durch successive Anwendung von Bianchi's Operation hervorgehen, dieselben unendlich entfernten Punkte besitzen. Da indess zwei unendlich entfernte Punkte eine unbestimmte Distanz (und also nicht wie in der









und  $y$  als Integrale besitze. Die vorliegende Note liefert einen Beitrag zur Lösung dieses schwierigen Problems, indem gezeigt wird, wie man unter der gemachten Voraussetzung aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung ein System von zwei linearen Differentialgleichungen herleiten kann, welche die gesuchten Lösungen liefern. T.

---

PICARD. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. C. R. XCV. 594-597.

Die vorliegende Note giebt Andeutungen über Verallgemeinerungen der wichtigen Untersuchungen des Herrn Poincaré über eindeutige Functionen (C. R. 1881 und Klein Ann. XIX. 3 ff., cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 247 ff.) auf den Fall zweier Variabeln. Poincaré hat gezeigt, dass jede Fuchs'sche Function durch Umkehrung des Quotienten zweier Integrale von gewissen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten erhalten werden kann. Geht man in analoger Weise von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln  $x$  und  $y$  aus, und besitzen dieselben drei gemeinschaftliche linear unabhängige Lösungen  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ , so führt der Fall, wo die Gleichungen  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$  für  $x$  und  $y$  eindeutige Functionen von  $u$  und  $v$  liefern, auf Functionen zweier Variabeln, die den Fuchs'schen Functionen entsprechen. Dies wird an einem Beispiel erläutert. Nachdem auf diese Weise die Existenz von eindeutigen Functionen von zwei Variabeln nachgewiesen ist, welche für eine Gruppe von linearen Substitutionen ungeändert bleiben, kann man umgekehrt und dem Gange der Poincaré'schen Arbeiten entsprechend von der Untersuchung jener linearen Substitutionen ausgehen. Hier stellt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Falle einer und dem zweier Variabeln heraus; während zu jeder „discontinuirlichen“ Gruppe im Falle einer Veränderlichen eine Fuchs'sche Function gehört, giebt es im Falle zweier Variabeln nicht immer eindeutige Functionen,



n derselben zu betrachtenden Variablen  $z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_n, \dots, q_n$ :

$$\begin{cases} \sum_k \left( \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial y} \right) = - \frac{\partial f_i}{\partial x} - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} p_k, \\ \sum_k \left( \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_k}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial y} \right) = - \frac{\partial f_i}{\partial y} - \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} q_k, \\ \sum_k \left( \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial z_k}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial z_k}{\partial y} \right) = \sum_k \left( p_k \frac{\partial f_i}{\partial p_k} + q_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \right), \end{cases}$$

( $i, k = 1, \dots, n$ )

Integrieren, so ist die l. c. entwickelte Integrationsmethode so anwendbar, und zwar führt dieselbe in dem vorliegenden, statt wie im Allgemeinen bei einem System von  $3n$  linearen partiellen Differentialgleichungen auf  $3n$  Systeme von je zwei, auf  $n$  Systeme von je  $n+3$  totalen Differentialgleichungen mit  $3n+2$  Veränderlichen. Ist  $\mu$  eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f_1}{\partial p_1}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial q_1} - \mu \frac{\partial f_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f_1}{\partial p_n}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial q_n} - \mu \frac{\partial f_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = 0,$$

sind  $l_1, \dots, l_n$   $n$  Grössen, proportional den Unterdeterminanten der Elemente einer Horizontalreihe dieser Determinante, so lautet dieses System:

$$\begin{cases} dy = \mu dx, \quad dz_1 = (p_1 + q_1 \mu) dx, \dots, \quad dz_n = (p_n + q_n \mu) dx, \\ \sum_{i,k} l_i \frac{\partial f_i}{\partial p_k} dp_k = - dx \sum_i l_i \frac{df_i}{dx}, \\ \sum_{i,k} l_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} dq_k = - dx \sum_i l_i \frac{df_i}{dy}, \end{cases}$$

( $\frac{df_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} p_k, \quad \frac{df_i}{dy} = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k} q_k$  sein soll).

Angesetzt, dass die Wurzeln der Gleichung  $\varphi(\mu) = 0$  sämtlich voneinander verschieden sind, und dass jedes der für diese Wurzeln sich ergebenden Systeme (3) je ein Integral  $v_k = c_k$  zulässt, so stimme man aus diesen  $n$  Integralgleichungen und den  $n$  ge-









che Form liefert, aus der dann die Lösung der partiellen Differentialgleichung sich ergibt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den Relationen, die zwischen zwei reducirten Formen stattfinden, und enthält insbesondere den Beweis dreier Sätze des Herrn Lie, die seiner Gruppentheorie zur Basis dienen. (Vgl. den Bericht über die betr. Arbeiten des Herrn Lie in diesem Werke Bd. V. p. 196ff.). Den Ausgangspunkt bildet hier für den Fall eines graden  $n$  die invariante Eigenschaft der beiden Ausdrücke

$$(\varphi) = \begin{vmatrix} a_1, \dots, a_n, X_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}, \dots, a_{nn}, X_n \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, 0 \end{vmatrix} : A \text{ und } (\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} a_1, \dots, a_n, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}, \dots, a_{nn}, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, 0 \end{vmatrix} : A,$$

$$a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

$A$  die Determinante der  $a_{i,k}$  und  $\varphi, \psi$  beliebige Functionen von  $x$  bedeuten. Ist  $n = 2m$  und sind

$$p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m, P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m$$

zwei reducirte Formen desselben Differentialausdrucks, dann wird

$$(\varphi) = \sum p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \sum P_i \frac{\partial \varphi}{\partial P_i},$$

$$(\varphi, \psi) = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} \frac{\partial \psi}{\partial X_i} - \frac{\partial \psi}{\partial P_i} \frac{\partial \varphi}{\partial X_i};$$

indem man diese allgemeinen Gleichungen auf die Functionen  $X_i$  und  $P_k$  anwendet, erhält man unmittelbar die bekannten Relationen

$$P_i(X_i) = 0, (P_i X_i) = 1, (P_i X_k) = 0, (X_i X_k) = 0, (P_i P_k) = 0.$$

Darauf folgt die Ableitung des Lie'schen Satzes, dass, wenn  $k$  abhängige Functionen  $X_1, \dots, X_k$  der unabhängigen Variablen

$x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m$  gegeben sind, die den Gleichungen

$$(X_i) = 0, (X_i, X_h) = 0$$

genügen, sich stets  $2m-k$  andere Functionen  $X_{k+1}, \dots, X_m, P_1, \dots, P_m$  angeben lassen derart, dass der Identität

$$P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m$$

genügt wird. Daran schliessen sich die Beweise zweier anderer Lie'schen Sätze bezüglich der Identitäten

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_m dX_m = \varrho (dz - p_1 dx_1 - \dots - p_m dx_m)$$

und

$$P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m + d\Pi = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m,$$

die dem Falle, dass  $n$  ungrade und  $= 2m+1$  ist, entsprechen.

Hr.

H. LEMONNIER. Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à  $n$  variables indépendantes  
S. M. F. Bull. X. 223-250.

T.

G. TEIXEIRA. Sur l'intégration d'une classe d'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre. Belg. Bul (3) III. 486-498.

Der Verfasser sucht die drei Bedingungen dafür, dass eine partielle Differentialgleichung  $Ar + Bs + Ct + D = 0$  ein Integrall habe von der Form

$$f(x, y, z, p, q) = \varphi(x, y),$$

wo  $\varphi$  eine willkürliche Function ist. Er reducirt die Integration auch für andere Fälle auf den Fall, wo zwei von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen vorhanden sind.  
Mn. (O.).

W. L. GLAISHER. On a partial differential equation.  
Brit. Ass. Rep. 1882.

In der Rep. of the Brit. Ass. von 1878 ist bewiesen worden,  
dass der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 u = \frac{h^2}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial h^2}$$

genügt wird durch  $u = e^{a\sqrt{x^2+2xh}}$ . Ihr wird auch genügt durch  
die Werte

$$u = \int_0^\infty \cos at \cdot \varphi\left(\frac{hx}{x^2+t^2}\right) dt,$$

$$u = \int_0^\infty \frac{x \cos at}{x^2+t^2} \cdot \varphi\left\{h\left(x+\frac{t^2}{x}\right)\right\} dt,$$

$$u = \int_0^\infty e^{-ta\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \cdot \varphi\left(\frac{hx}{t^2}\right) dt.$$

Cly. (O.).

G. DARBOUX. Sur une équation linéaire aux dérivées  
partielles. C. R. XCV. 69-72.

Für die von Euler, Lagrange, Laplace, Poisson und Riemann  
behandelte, in der mathematischen Physik und in der Geometrie  
eine Rolle spielende lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2} z$$

werden die folgenden Eigenschaften angegeben:

1) Sie ändert sich nicht, wenn man  $x$  und  $y$  gleichzeitig  
derselben linearen Substitution unterwirft, so dass aus jedem  
particulären Integral  $z = \varphi(x, y)$  ein Integral mit drei willkür-  
lichen Constanten:

$$z = \varphi\left(\frac{mx+n}{px+q}, \frac{my+n}{py+q}\right)$$

folgt. Aus dem particulären Integral

$$z = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right),$$



$$(x-y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \beta' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

welche der Verfasser schon früher gestossen ist (C. R. XC.; F. d. M. XII. 1880 p. 296). Es wird gezeigt, dass sich die von Darboux für jene angegebenen Eigenschaften auf diese allgemeinere Gleichung übertragen lassen.

Ist  $\varphi(x, y)$  eine Lösung, so ist es auch

$$(ax+b)^{-\beta} (ay+b)^{-\beta'} \varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

wo  $a, b, c, d$  beliebige Constanten sind. Als Lösungen, die nur von  $\frac{x}{y}$  abhängig sind, ergeben sich specielle Fälle von

$$x^{-\beta} y^{\mu} F\left(\beta, \mu + \beta', \mu + \lambda, \frac{y}{x}\right) \text{ und } x^{\mu} y^{-\beta'} F\left(\beta', \mu + \beta, \mu + \lambda, \frac{x}{y}\right),$$

wo  $\lambda$  eine willkürliche Grösse ist), die auch Lösungen sind.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten ergibt als Lösung in Form einer Potenzreihe die folgende:

$$u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\dots(\beta'+n-1)}{m! n!} \psi(m+n) x^m y^n,$$

wo  $\psi$  eine willkürliche Function bedeutet. Eine passende Wahl von  $\psi$  liefert die hypergeometrische Reihe mit zwei Variabeln  $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$ . Ferner kann man  $\psi$  so wählen, dass man für  $u$  rationale, ganze Functionen in unendlicher Anzahl und von jedem beliebigen Grade erhält. Ist  $u$  eine beliebige Lösung der Differentialgleichung, so sind  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}$  Lösungen der Gleichungen, die man aus jener erhält, wenn  $\beta$  resp.  $\beta'$  um eine Einheit vermehrt wird. Diese Eigenschaft, ferner die Transformation  $u = (x-y)^{1-\beta-\beta'} \cdot t$  vermitteln die Herstellung des allgemeinen Integrals für ganz beliebige, reelle oder complexe Werte von  $\beta$  und  $\beta'$ . T.

J. BOUSSINESQ. Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions, et notamment de celui du second ordre  $\Delta_2$ . C. R. XCV. 479-482.



Eigenschaft hat, seine zweite Ableitung nach  $x$  zu liefern, wenn man  $f$  und  $\varphi$  resp. durch  $f'$  und  $\varphi'$  ersetzt. Allgemeiner hält man, wie in der vorliegenden Note gezeigt wird, in derselben Weise aus dem Integral

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right) \psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right) d\alpha \quad (r^2 = x^2 + y^2 + \dots)$$

den Ausdruck

$$\Delta_2 \varphi \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots \right) \varphi,$$

als  $p = \frac{2}{2-m}$  ist, wo  $m$  die Anzahl der Veränderlichen  $x, y, \dots$  bedeutet. Auf Grund dessen ergibt sich aus der citirten Note, dass die Functionen

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right) \psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right) d\alpha$$

und

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right) \psi\left(\frac{\alpha^p}{2}\right) d\alpha$$

die partielle Differentialgleichung

$$A \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} + (\Delta_2)^n \varphi = 0$$

zufrieden, wenn  $\varphi$  irgend eine der  $n$  verschiedenen Lösungen der Differentialgleichung  $(\pm 1)^n \psi^{(n)} + A\psi = 0$  bedeutet. (Im Falle  $n = 2$ , also  $p = \infty$ , sind  $\alpha^p$  durch  $e^\beta$ ,  $d\alpha$  durch  $d\beta$  und die Grenzen durch  $-\infty$  und  $+\infty$  zu ersetzen). An dieses Ergebnis werden Bemerkungen über seine Anwendbarkeit geknüpft. T.

K. M. PETERSON. Ueber Integration partieller Differentialgleichungen. III. Abhandlung. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

Diese Abhandlung ist der Entwicklung von tiefsinnigen Betrachtungen des verstorbenen Verfassers über die Theorie der Integration partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnung mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher ge-





nach ihr verschiedenes Verhalten zu einander bei der Integration des Systems bedingt.

Vergleicht man die allgemeinste lineare Gleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung  $F = 0$  mit  $m$  unabhängigen Veränderlichen mit derjenigen, welche die Differentialgleichung

$$(6) \quad E = Pdp + Qdq + \dots + Xdx + Ydy + Zdz + \dots = 0,$$

in der  $p, q, \dots$  die Derivirten bis zur  $(n-1)^{\text{ten}}$  Ordnung bezeichnen, nach der Elimination der  $dp, dq, \dots$  mit Hülfe der Gleichungen

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \dots \text{ etc.}$$

unter den Bedingungen (3) übergeht, so findet man, dass diese letzte Gleichung jene allgemeinste Form  $F = 0$  haben kann, wenn

$$N_{n-1}^m + m - 1 \geq N_n^m$$

wo  $N_n^m = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m-1)}{1.2\dots(m-1)}$  ist). Diese Ungleichung

wird erfüllt: 1) wenn  $n = 1$ ,  $m$  beliebig; 2) wenn  $m = 2$ ,  $n$  beliebig. Dadurch zerfallen alle linearen partiellen Differentialgleichungen in 3 verschiedene Klassen: 1) Gleichungen 1<sup>ter</sup> Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen; 2) Gleichungen beliebiger Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen; 3) alle andern Gleichungen.

Eine lineare Differentialgleichung I. und II. Klasse wird immer in eine bedingte Gleichung  $Fdx = 0$  übergehen, lineare Differentialgleichungen III. Klasse nur in einem besonderen Falle. Durch den Mechanismus der Integration werden diese 3 Klassen von Gleichungen scharf von einander unterschieden. In Klasse I. kommt nur eine willkürliche Function vom  $m-1$  Argumenten vor, in Klasse II. hängen die vorkommenden Functionen von je einem Argumente ab; was nicht mehr in der III. Klasse der Fall ist.

Es würde schwer fallen, in einer kurzen Notiz über diese ziemlich grosse Abhandlung ihren ganzen Inhalt zu skizziren: wir wollten nur die Grundideen andeuten, um so mehr, als im Nachlass des Verfassers eine deutsche Abhandlung über denselben Gegenstand gefunden worden ist. Ty.



ch dem Einsetzen der rechten Seite von (1) für  $y$  bezeichnen, der ganzen Function von  $x$  bis zu Gliedern von der Ordnung  $n$  gleich wird. In dem Falle, dass  $F$  keine höheren Potenzen in  $y$  als die zweiten und nur die ersten Potenzen von  $y', y'', \dots$  & Coefficienten, die nur von  $x$  abhängen, enthält, nimmt der Ausdruck (2) die Gestalt an:

$$M(x)y \int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z} - \varphi(x),$$

und die Aufgabe kann dann nach der Methode von Tschebischeff durch Entwicklung der Function

$$\int_a^b \frac{M(z)f(z)dz}{x-z}$$

in einen Kettenbruch gelöst werden.

Ty.

J. WALKER. Solution of a question (6571 und 6598).  
Ed. Times XXXVI. 40-42.

Der Inhalt der Note betrifft die Variation des Crofton'schen Integrals

$$\iint (\vartheta - \sin \vartheta) dx dy = \frac{1}{2} L^2 - \pi \Omega$$

Lond. Trans. 1868 p. 188; s. F. d. M. I. (1868) p. 75), unter der Voraussetzung, dass der Umfang der geschlossenen Linie  $L$ , welche die Fläche  $\Omega$  begrenzt, in eine andere benachbarte übergeht, die dadurch erzeugt wird, dass jeder Krümmungsradius  $\varrho$  in  $\Omega$  um ein Stück  $\mu f(\varrho)$  verlängert wird, wo  $\mu$  eine unendlich kleine constante Grösse ist. Es wird

$$\iint \left\{ \frac{f(\varrho_1)}{t_1} + \frac{f(\varrho_2)}{t_2} \right\} \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta \cdot dx \cdot dy = \frac{1}{2} L \int_0^{2\pi} f(\varrho) d\varphi,$$

wo  $t_1, t_2$  die Längen der Tangenten sind, die von dem Punkte  $x, y$  an  $\Omega$  gezogen werden,  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Krümmungsradien der entsprechenden Berührungspunkte,  $\varrho$  der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte der Curve und  $\varphi$  die Neigung des Radius zu einer festen Linie in der Ebene. Die Integration erstreckt sich auf die ganze Ebene ausserhalb  $\Omega$ .

Geht man von dem Crofton'schen Integral

$$\iint \vartheta dx dy = \pi \theta - \int_0^{2\pi} \Sigma d\omega$$

(ib. p. 190) aus und lässt nur die innere Begrenzung variiren, so erhält man

$$\iint \left\{ \frac{f(\varrho_1)}{t_1} + \frac{f(\varrho_2)}{t_2} \right\} dx dy = \int_0^{2\pi} c f(\varrho) d\omega,$$

wo  $\vartheta$  der Winkel zwischen den beiden Tangenten ist, die von irgend einem Punkte an die innere und äussere Begrenzung gezogen werden.  $c$  ist eine Sehne, die von der äusseren Begrenzung ein Segment  $\Sigma$  abschneidet und die innere berührt;  $\omega$  ist der Winkel, den  $c$  mit einer festen Linie bildet.

Lässt man allein die äussere Begrenzung variiren, so erhält man

$$\int_0^{2\pi} (\pi - \vartheta) \varrho f(\varrho) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\beta} \varrho f(\varrho) d\varphi \right\} d\omega,$$

worin  $\varrho$  jetzt der Krümmungsradius der äusseren Begrenzung an der Stelle ist, wo die Tangenten der inneren den Winkel  $\vartheta$  bilden;  $\beta$  ist der Winkel zwischen den Normalen in den Endpunkten von  $c$ . Die Integration erstreckt sich auf den Ring zwischen beiden Begrenzungen. M.













ptischen Functionen Gentüge leisten“, Crelle J. XXXVI. p. 80-88;  
 „Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{etc.}, \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{etc.}$$

ntüge leisten“, Crelle J. XXXVI. p. 97-112; und aus dem Nach-  
 23) „Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenz-  
 en, Crelle J. LIV. p. 82-97, mitgeteilt durch C. W. Borchardt.  
 wendungen der elliptischen Functionen enthalten folgende Ab-  
 dlungen: 3) „Ueber die Figur des Gleichgewichts,“ Poggen-  
 ff Ann. XXXIII. p. 229-233. 18) „Ueber eine particuläre Lösung  
 partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

alle J. XXXVI. p. 113-134. Die Differentialgleichung wird auf  
 iptische Coordinaten transformirt, dann mit Benutzung der  
 iptischen Functionen ein particuläres Integral derselben auf-  
 stellt. 19) „Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zu-  
 eich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten  
 id“, Crelle J. XXXVII. p. 61-94 u. 222-254, wo die in der Theorie  
 r elliptischen Functionen auftretenden  $q$ -Reihen auf Probleme  
 r Zahlentheorie angewendet werden. 21) „Auszug eines Schrei-  
 is von C. G. J. Jacobi an E. Heine“, Crelle J. XLII. 35-40,  
 lches die elliptischen Functionen zur Lösung der von Lamé  
 rachteten Gleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2} + n(n+1)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)X_n = 0$$

utzt. 24) „Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellip-  
 is auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Teile ähnlich  
 iben“, Crelle J. LIX. 74-88, mitgeteilt von S. Cohn. 25) „So-  
 on nouvelle d'un problème fondamental de géodésie“, Astr.  
 chr. XLI. p. 210 u. f., Crelle J. LIII. p. 335-341, mitgeteilt von  
 Luther. Und endlich die berühmte Abhandlung: 20) „Sur la  
 ation d'un corps.“ Extrait d'une lettre adressée à l'Académie  
 Sciences de Paris, Crelle J. XXXIX. p. 292-350, worin die  
 n Cosinus des Problems mit Hülfe der elliptischen Functionen  
 $\frac{2Kx}{\pi}$ ) und  $H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)$  als Functionen der Zeit ausgedrückt







, Lagrange's Form, Cauchy's Form, specielle Fälle der  
en, Erweiterung derselben, Ausdrücke durch bestimmte  
ale, Restglied bei Taylor, Cayley, Lagrange. Dann folgen  
unctionen einer complexen Variabeln: allgemeine und be-  
e Formen des Theorems, Restglied in Taylor's Satz.

M.

---

CAYLEY. On the geometrical representation of an  
ation between two variables. J. Hopkins Circ. 1882. 210.

Wird die Darstellung zweier Variablen  $z = x + iy$  und  
 $+iy'$  durch Punkte in zwei Ebenen auf die Gleichung  
 $\sqrt{z^4 - 1}$  angewandt, so entspricht einem System von Halb-  
n (aus dem Coordinatenanfang) in der einen Ebene eine  
: von Lemiscatenartigen Curven in der anderen.

Schg.

---

CAYLEY. On associative imaginaries. J. Hopkins Circ.  
2. 211-212.

Die imaginären Grössen  $x, y$  werden definiert durch folgende  
ungen:

$$\begin{aligned}x^2 &= ax + by \\xy &= cx + dy \\yx &= ex + fy \\y^2 &= gx + hy;\end{aligned}$$

Wenden die Bedingungen untersucht, die zwischen den Coef-  
ficienten  $a, b, c, d, e, f, g, h$  bestehen müssen, damit die imaginä-  
ren Grössen associative Grössen sind. Es ergeben sich zwölf  
verschiedene Relationen zwischen jenen acht Coefficienten.

M.

---

HARR. On the establishment of the elementary  
principles of quaternions in an analytical basis.

. Ass. Rep. 1882.

Csy.



CANTOR. Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionen.

Lein Ann. XIX. 588-594.

Hankel hat in seinen „Untersuchungen über die unendlich oscillirenden und unstetigen Functionen; ein Beitrag zur Festung des Begriffes der Function überhaupt“ (Tübinger Uni-tätsprogramm 1870, wieder abgedruckt in Klein's Ann. XX. 63, cf. das vorhergehende Referat) eine Methode „Con-densationsprincip der Singularitäten“ gegeben, wonach sich aus unctionen  $\varphi(x)$ , die an einer gegebenen Stelle irgend ein sin-res Vorkommnis darbieten, andere Functionen herstellen en, welche die genannte Unstetigkeit an unendlich vielen Stellen ohmen, und zwar an einer überall dichten Mannigfaltigkeit

Stellen. Die von Hankel gegebene Methode besitzt aber rseits nicht die wünschenswerte Einfachheit, weil die auf-ellte Function noch durch secundäre Vorkommnisse complicirt heint, andererseits nicht volle Allgemeinheit, insofern die Man-altigkeit der Stellen, für welche die Singularität in der gebil-n Function auftritt, sich auf die Menge der rationalen Zahlen hränkt, ohne dass in der vorliegenden Form eine Erweiterung beliebige abzählbare Zahlenmengen möglich erscheint.

Herr Cantor giebt nun ein Bildungsgesetz (eine absolut und chmässig convergente Reihe) für eine solche Function an, welche singulären Stellen für eine ganz beliebige, nur abzählbare inigfaltigkeit von Zahlenwerten besitzt, und wo die einzelne gularität für sich jedesmal durch ein Glied in der Reihenent- kelung der Function charakterisirt erscheint. Ist nämlich  $\varphi(x)$  : Function mit der einzigen singulären Stelle  $x = ()$ , und ist : beliebige, abzählbare Menge von Stellen  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, \dots$  eben, so setze man

$$f(x) = \sum_{r=1}^{r=x} c_r \cdot \varphi(x - \omega_r),$$

durch passende Wahl der Coefficienten stets die Reihe von absolut und gleichmässig convergent herzustellen ist. Da- ch ist dann eine Function gebildet, welche an allen Stellen



stellung der Function  $F(x)$  in der Form

$$F(x) = \int \frac{\Phi(z)}{z} \cdot e^{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{z} - 1} dz,$$

wo  $\Phi(z)$  jene ganze Function bezeichnet und das Integral den Punkt  $z = 0$  genommen ist. In etwas weiterer Ausführung sind diese Resultate seither im Bulletin de la société mathématique de France vol XI. (1883) veröffentlicht. Dk.

P. CAZZANIGA. Espressione di funzioni intere che posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti. Brioschi Ann. (2) X. 279-290.

Der Verfasser leitet den allgemeinsten analytischen Ausdruck einer Function  $f(z)$  von  $z$  her, welche an beliebig vorgeschriebenen Stellen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  (welche nur so verteilt sind, dass jedem endlichen Flächenstück nur eine endliche Anzahl solcher Stellen sind) vorgeschriebene Werte  $f_1, f_2, f_3, \dots$  annimmt, lässt dabei die Analogie mit der Lagrange'schen Interpolationsformel hervortreten, welche das analoge Problem für eine endliche Anzahl vorgegebener Stellen  $\alpha$  durch eine rationale ganze Function löst. Die Construction der gemeinten Function gelingt sofort mit Hülfe der von Weierstrass zuerst principiell eingeführten Primfactoren. Setzt man

$$E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) \cdot e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}$$

und

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right),$$

wo die ganzen Zahlen  $p_\nu$  so gewählt sind, dass für jeden endlichen Wert von  $z$  die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

divergirt, bedeutet ferner  $w_1(z)$  eine beliebige ganze Function von  $z$ , so ist durch den im Endlichen convergenten Ausdruck

$$\delta_{z, \alpha} = \frac{\varphi(z) E' \left( \frac{z}{\alpha}, p \right) \cdot e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha) E \left( \frac{z}{\alpha}, p \right) \cdot e^{w_1(\alpha)}},$$

wo der Accent die Differentiation nach  $z$  bedeutet) eine Function von  $z$  dargestellt, welche für  $z = \alpha$  zu Eins, für  $z = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_{r+1}, \dots$  zu Null wird. Multipliciren wir das  $\delta_{z, \alpha}$  mit  $f$  und bilden

$$\Sigma f \delta_{z, \alpha} = f(z),$$

so ist damit die eingangs verlangte Function  $f(z)$  hergestellt. Für  $w_1(z) = 0$  nimmt der Ausdruck eine Form an, welche unmittelbar der Lagrange'schen Interpolationsformel analog gebaut ist und welche in die letztere übergeht, wenn man (was bei der unendlichen Anzahl der  $\alpha_i$  gestattet ist) alle  $p$  zu Null setzt.

Es folgt noch die Untersuchung der Convergenz des für  $f(z)$  erhaltenen Ausdrucks unter der Annahme  $w_1(z) = 0$ , und endlich die Entwicklung desselben in eine Potenzreihe nach  $z$ .

Dk.

WEIERSTRASS. Recherches sur les fonctions  $2r$ -fois périodiques de  $r$  variables. Darb. Bull. (2) VI. 111-120.

Eine von Herrn J. Molk veröffentlichte Uebersetzung der Abhandlung Borchardt J. IXC. 1—8, über welche F. d. M. XII. (80) 313 berichtet worden ist.

M.

MITTAG-LEFFLER. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. C. R. XCIV. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; XCV. 335-336.

Fortsetzung der Untersuchungen des Herrn Verfassers über Darstellung eindeutiger analytischer Functionen. Für das

Frühere vergl. F. d. M. XI. (1879) p. 264; XII. (1880) p. XIII. (1881) p. 307. Nach der von Herrn Weierstrass (Ber 1880) gegebenen Methode lässt sich folgender allgemeine beweisen: „Sind  $a_1, a_2, a_3, \dots$  eine unendliche Reihe verschiedene Werte, für welche

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_v = \infty$$

ist, und

$$G_v(y) = \sum_m c_m^{(v)} y^m \quad (v = 1, 2$$

ganze, rationale oder transcendente Functionen, die für  $y = 0$  verschwinden, so lässt sich immer eine analytische Function bilden, die keine andern singulären Punkte als  $a_1, a_2, a_3, \dots$  und die so beschaffen ist, dass für jeden bestimmten Wert  $v$  die Differenz

$$F(x) - G_v\left(\frac{1}{x - a_v}\right),$$

wenn man  $x = a_v$  setzt, einen endlichen und bestimmten annimmt, so dass sich  $F(x)$  in der Umgebung von  $x = a_v$  der Form

$$G_v\left(\frac{1}{x - a_v}\right) + P(x - a_v)$$

entwickeln lässt.“ Wenn nun in dieser Darstellung, welche Form hat:

$$F(x) = \sum_{v=1}^{\infty} F_v(x) + G(x),$$

wo

$$F_v(x) = G_v\left(\frac{1}{x - a_v}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_v-1} A_{\mu}^{(v)} \left(\frac{x}{a_v}\right)^{\mu}$$

und

$$G_v\left(\frac{1}{x - a_v}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}^{(v)} \left(\frac{x}{a_v}\right)^{\mu} \quad \text{für} \quad \left|\frac{x}{a_v}\right| < 1.$$

$F(x)$  eine bekannte Function ist, und man will sie durch eine Reihe von obiger Form ausdrücken, so handelt es sich um solche Zahlen  $m_v$  zu finden, dass die Reihe  $\sum_{v=1}^{\infty} F_v(x)$  convergent wird, und die Function  $G(x)$  zu bestimmen. Es wird im Folgenden eine Formel entwickelt, welche ein Mittel

Das Problem in einem sehr allgemeinen Falle zu lösen. Diese Formel wird noch verallgemeinert zu folgender:

$$F(x) = \bar{G}(x) + \sum_{\nu=0}^n \bar{F}_{\nu}(x) - \frac{1}{2\pi i} \int F(x) \left\{ \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z} \left[ B_0 - B_1 \frac{x}{z} + \cdots + B_{m-1} \left( \frac{x}{z} \right)^{m-1} \right] \right\} dz,$$

wo die  $B$  willkürliche, von  $z$  und  $x$  unabhängige Grössen sind. Es folgen Anwendungen auf den Fall, wo

$$F(x) = R(y) \cdot r(x), \quad y = e^x,$$

wo  $r$  eine algebraische rationale Function von  $x$ , und  $R(y)$  eine algebraische rationale Function von  $y$  ist, die für  $y = 0$  und  $y = \infty$  endlich bleibt. Unter Anderm ergeben sich daraus die Entwicklungen von  $\pi \cot \pi x$ , von denen Herr Gylden bei der Störungsrechnung Gebrauch gemacht hat. Ferner wird

$$F(x) = f(x) \cdot r(x)$$

gesetzt, wo  $f(x)$  eine endliche monogene Function mit einer endlichen Anzahl singulärer Punkte, und

$$f(x + 2w) = \mu f(x), \quad f(x + 2w') = \mu' f(x),$$

wo  $w, w', \mu, \mu'$  Constanten,  $\frac{w'}{w}$  nicht reell, und  $[\mu] < 1, [\mu'] < 1$ .

Alsdann giebt der Herr Verfasser einen Auszug aus einer älteren Abhandlung, die in den Berichten der Akademie zu Stockholm erschienen ist, und welche auf dem obigen allgemeinen Satze die Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Variablen aufbaut. Auch wird dieses allgemeine Theorem angewendet auf das Studium der von Herrn Poincaré eingeführten analytischen Functionen. M.

CASORATI. Aggiunte a recenti lavori dei sig.<sup>i</sup> Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. Brioschi Ann. (2) X. 261-278.

Ebenso wie Herr Mittag-Leffler selbst (s. d. obige Referat) verallgemeinert auch Herr Casorati den von ersterem gegebenen Satz, durch eine Summe passend modificirter rationaler Functionen eine eindeutige Function darzustellen, die wie jeder

dieser Brüche unendlich wird, dahin, dass er diese Darstellung auf eine Menge verschiedenartiger eindeutiger oder nicht eindeutiger Functionen anwendet, die sich in der Umgebung einer gegebenen Reihe von Punkten ebenso verhalten wie gewisse in jedem dieser Punkte gegebene, eindeutige oder nicht eindeutige algebraische oder transcendente, Functionen. Insbesondere wendet er sie an auf die Darstellung eindeutiger Functionen mit einer unendlichen Anzahl solcher wesentlichen singulären Stellen, wie sie Herr Weierstrass in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“ (Berl. Abh. 1876) in einer beliebigen Anzahl betrachtet hat. Die gegebene Verallgemeinerung führt zu verschiedenen neuen Resultaten über die eindeutigen und nicht eindeutigen Functionen. M.

F. CASORATI. Sulle funzioni analitiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 250-251.

Kurze Notiz über einen Bericht, den Herr Casorati dem Institut gegeben, und der die neuesten Untersuchungen des Verfassers, sowie der Herren Weierstrass und Mittag-Leffler über eindeutige Functionen betrifft. M.

S. PINCHERLE. Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 224-225.

Einige Sätze über die Entwicklung einer analytischen Function  $F(x)$ , die innerhalb eines Kreises um  $x = 0$  regulär ist, nach analytischen Functionen  $p_0(x)$ ,  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , ..., die ebenfalls in einem Kreise um den Nullpunkt regulär sind, in der Form:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x),$$

ohne Beweis. M.

HERMITE. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler. Kronecker J. XCII. 145-155.

Der analytische Ausdruck der Function  $D_x \log \Gamma(1+x)$  durch Formel

$$1 + \left[1 - \frac{1}{1+x}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right] + \dots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right] + \dots$$

das erste bekannte Beispiel, wo die divergente Reihe der einfachen Brüche sich in eine absolut convergente Reihe verwandelt, indem man jedem der Brüche eine Constante hinzufügt. Das zweite Beispiel bieten die elliptischen Functionen. In der Weierstrass'schen Formel

$$\frac{\zeta(x)}{\zeta(x)} = \sum \left[ \frac{1}{x+2mK+2m'iK'} - \frac{1}{2mK-2m'iK'} - \frac{x}{(2mK+2m'iK')^2} \right]$$

man ein Binom ersten Grades, anstatt der Constanten, nehmen. Herr Hermite giebt weitere Beispiele, wo von den einfachen Brüchen ein ganzes Polynom von endlichem Grade, aber sonst ganz beliebig sein kann, weggenommen wird. Dann

$$F(x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(a)}{\Gamma(x+a)},$$

hat Pole  $x = -n$ , und die entsprechenden Residuen

$$R_n = \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

ist, wenn  $a$  positiv, die Reihe  $\sum \frac{R_n}{x+n}$  convergent, und man

$$F(x) = \sum \frac{R_n}{x+n};$$

wenn  $a$  negativ  $= -\nu + \alpha$ , wo  $\nu$  ganz und  $\alpha$  positiv, so sich  $F(x)$  in der Form schreiben:

$$F(x) = \sum \left[ \frac{R_n}{x+n} + G_n(x) \right],$$

das Theorem des Herrn Mittag-Leffler bedingt. Zu ähn-



$$\int_a^\beta Z_k Z_{k'} dx = 0$$

alle Fälle, wo  $k$  und  $k'$  verschiedene Werte haben, genügen. Vorliegenden wird eine ähnliche Reihe von Functionen gesetzt. Kennt man nämlich  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$ , und will man  $Z_n$  finden, genügt dieses folgenden Gleichungen:

$$\int_a^\beta Z_n Z_0 dx = 0, \int_a^\beta Z_n Z_1 dx = 0, \dots \int_a^\beta Z_n Z_{n-1} dx = 0.$$

Man kann nun  $Z_0$  willkürlich festsetzen und nach und nach die übrigen  $Z$  finden. Es wird alsdann der Fall betrachtet, wo alle  $Z$  der Form

$$Z_n = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

ist. Dann lässt sich eine Function  $\varphi(x)$ , deren Werte zwischen  $a$  und  $\beta$  gegeben sind, mit Hülfe der  $Z$  in eine Reihe der Functionen  $f_0, f_1, \dots$  entwickeln. Für specielle Fälle stimmt  $Z_n$  mit dem  $n^{\text{ten}}$  Legendre'schen Polynom überein. M.

CAZZANIGA. Sopra una formola di Cauchy, concernente lo sviluppo di funzioni in prodotti infiniti.

Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 273-279.

Es sei  $w(z)$  eine monodrome stetige und endliche Function, gleich mit ihrer Ableitung  $w'(z)$ , innerhalb eines Bereiches  $S$  dem Umfang  $s$ , ausgenommen die Punkte  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ , in denen sie unendlich von den Ordnungen  $n_1, n_2, \dots, n_r$  resp. wird, es verschwinde  $w(z)$  in den Punkten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$  von den Ordnungen  $m_1, m_2, \dots, m_\mu$  resp., und endlich seien die Werte von  $w$  und  $w'(z)$  in irgend einem Punkte  $\gamma$  des Bereiches  $S$  gegeben, der natürlich von den  $\beta$  verschieden sein muss. Alsdann lässt sich  $w(z)$  durch unendliche Producte in folgender Form ausdrücken:

$$w(z) = w(\gamma) \frac{\prod \left\{ \varepsilon \left( \frac{z}{\alpha_h}, p_h \right) \right\}^{m_h}}{\prod \left\{ \varepsilon \left( \frac{\gamma}{\alpha_h}, p_h \right) \right\}^{m_h}} \cdot \frac{\prod \left\{ \varepsilon \left( \frac{\gamma}{\beta_k}, q_k \right) \right\}^{n_k}}{\prod \left\{ \varepsilon \left( \frac{z}{\beta_k}, q_k \right) \right\}^{n_k}} \cdot e^{\int U(z, \gamma) dz}$$

( $h, k = 1, 2, 3, \dots$ ),



wo

$$\varepsilon\left(\frac{z}{c}, r\right) = \left(1 - \frac{z}{c}\right) e^{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \frac{1}{\varrho} \left(\frac{z}{c}\right)^{\varrho}}$$

gesetzt ist. Es ist dies eine Verallgemeinerung der Formel von Cauchy. A

P. APPELL. Théorèmes sur les fonctions d'un point analytique. C. XCV. 624-626.

Verallgemeinerung einer früheren Untersuchung (C. R. 1238). Die beiden bekannten Theoreme von Cauchy, erstens, dass eine ausserhalb einer geschlossenen Curve holomorphe Function dargestellt wird durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi) \cdot d\xi}{x - \xi},$$

das Integral genommen über die Grenzcurve, und zweitens, dass eine ausserhalb eines Kreises vom Mittelpunkt  $a$  holomorphe Function  $f(x)$  dargestellt wird durch eine convergente Reihenform

$$f(x) = \sum_0^{\infty} A_{\nu} \left[ \frac{d^{\nu}}{d\xi^{\nu}} \left( \frac{1}{x - \xi} \right) \right]_{\xi=a},$$

welche sich beide auf die Ebene beziehen, werden ausgedehnt auf die mehrblättrige Riemann'sche Verzweigungsfläche,

an Stelle von  $\frac{1}{x - \xi}$  das Integral 2<sup>ter</sup> Gattung  $Z(\xi, \eta)$  mit

Pol  $(\xi, \eta)$  tritt. H. S

P. APPELL. Relations entre les résidus d'une fonction d'un point analytique etc. C. R. XCV. 714-717.

Erweiterung der Untersuchung C. R. XCI. 972 (s. F. XII. (1880) 250). Definirt man in der durch die algebraische Gleichung  $F(x, y) = 0$  bestimmten Riemann'schen Fläche

on  $\Phi(x, y)$  derart, dass sie nur in den Punkten

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$$

und in denselben die Residuen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  hat und Ueberschreiten der  $2p$  Querschnitte die  $2p$  Multiplicatoren  $\mu_1, \dots, \mu_{2p}$  annimmt, so bestehen zwischen den Polen und den Residuen  $(p-1)$  Relationen der Form

$$A_1 \omega_s(\xi_1, \eta_1) + \dots + A_n \omega_s(\xi_n, \eta_n) = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, p-1),$$

wo  $\omega$  gewisse aus algebraischen Functionen und Thetafunctionen zusammengesetzte Ausdrücke darstellen, deren Coefficienten von den Multiplicatoren  $\mu$  abhängen. H. St.

APPELL. Sur les fonctions uniformes d'un point analytique  $(x, y)$ . C. R. XCIV. 700-703.

Auszug aus einer Abhandlung, welche das Studium der eindeutigen Functionen eines analytischen Punktes  $(x, y)$  zum Gegenstande hat, wo  $y$  mit  $x$  durch eine algebraische Gleichung  $F(x, y) = 0$  verbunden ist, die eine Curve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung und  $p^{\text{ter}}$  Gattung darstellt. Auf diese Functionen werden die Theoreme von Weierstrass und Mittag-Leffler für die eindeutigen Functionen einer Variablen  $x$  ausgedehnt. Zunächst werden Functionen mit einer bestimmten Zahl singulärer Punkte, welche in Pole und in wesentliche singuläre Punkte unterschieden werden, in eine Doppelreihe von der Form

$$f(x, y) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{A^{(k)}_v}{(x - a_k)^v}$$

entwickelt. Alsdann wird mit Hülfe der Function  $\theta(u_1, u_2, \dots, u_p)$  in  $p$  Variablen mit den normalen Perioden der Integrale  $u^{(i)}(x, y)$  der allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen Function mit einem endlich vielen singulären Punkte  $(a, b)$  gebildet. Zuletzt wird für Functionen, welche eine unendliche Reihe singulärer Punkte enthalten, eine Verallgemeinerung des Mittag-Leffler'schen Theorems angegeben. M.

P. APPELL. Développements en série d'une fonction holomorphe dans une aire limitée par des arcs de cercle. C. R. XCIV. 1238-1240.

Diese Entwicklungen gelten für alle Punkte innerhalb eines Bereiches, der von  $n$  Kreisbögen  $C_1, C_2, \dots$  begrenzt wird, deren Convexität gegen das Innere des Bereiches kehren, mit Mittelpunkten  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Die Darstellung durch eine Summe rationaler Brüche hat die Form:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu}^{(k)} \frac{1}{(x - \alpha_k)^{\nu}},$$

wo

$$A_{\nu}^{(k)} = - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} (z - \alpha_k)^{\nu-1} f(z) dz.$$

Es folgt die Entwicklung einer Function in eine Reihe doppelt-periodischer Functionen und drittens in eine Reihe einfach-periodischer Functionen. M.

P. APPELL. Sur les fonctions uniformes doubles périodiques à points singuliers essentiels. C. R. XCV. 936-938.

Entwicklung einer doppelt-periodischen Function, welche in dem Bereiche zwischen einem Kreise um das feste Centrum und dem Umfang des Periodenparallelogramms für die Perioden  $\omega, \omega'$  holomorph ist, in der Form:

$$f(x) = \frac{A_0}{2\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Z^{(n)}(a-x), \quad Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du},$$

$$2\pi i A_n = - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \int_{\gamma} (u-a)^n f'(u) du, \quad Z^{(n)}(u) = \frac{d^n Z(u)}{du^n}$$

Es wird das Theorem von Mittag-Leffler auf diese eindeutigen doppelt-periodischen Functionen mit wesentlich singulären Punkten ausgedehnt. Eine eindeutige doppelt-periodische Function  $\varphi(x)$ , welche in den Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$  verschwindet, keine Pole hat und den einen wesentlichen singulären Punkt

Nun lässt sich darstellen in der Form:

$$f(x) = A \prod_{v=1}^{\infty} \frac{\theta_1(x-a_v)}{\theta_1(x-a)} e^{(a_v-a)Z(x-a)} \cdot e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a-a_v)^{m+1}}{1 \cdot 2 \dots (m+1)} Z^{(m)}(x-a)},$$

die ganzen  $m_v$  passend zu wählen sind. M.

HALPHÉN. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. C. R. XCIV. 629-631.

Die schon von Tchébycheff (Mélanges math. et astr. II. 182, Paris 1859) und Laguerre (Bull. S. M. F. VII. 72, s. F. d. M. (1879) 214) angewendeten und auch von Abel (Oeuvres II. 4) bekannten Polynome

$$P_n(x) = \frac{e^x}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

$$= 1 - \frac{n}{1^2} x + \frac{n(n-1)}{(1 \cdot 2)^2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} x^3 + \dots$$

den benutzt zur Entwicklung einer Function in der Form

$$f(x) = A_1 + A_2 P_1\left(\frac{x}{2\beta}\right) + A_3 P_2\left(\frac{x}{3\beta}\right) + \dots + A_n P_{n-1}\left(\frac{x}{n\beta}\right) + \dots,$$

$\beta$  willkürlich und die  $A_n$  von  $x$  unabhängig sind. Es ist

$$A_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \int_0^x f(n\beta + x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx.$$

M.

PICARD. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 579-582.

Die elliptische Modulfuction bietet das erste Beispiel für eine solche eindeutige Function einer Variablen, die durch eine Gruppe von unendlich vielen linearen Substitutionen nicht geändert wird. Die Theorie der Abel'schen Functionen bietet hier kein Analogon. Herr Picard hat sich nun die Aufgabe gestellt, eindeutige Functionen zweier Variablen zu finden, die den

Modulfunctionen analog sind. Bei Betrachtung der algebraischen Relation

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

ist der Herr Verfasser zu solchen Functionen gelangt (C. R. 835; vergl. F. d. M. XIII. (1881) p. 375). Im Vorliegenden ist eine Ungleichung aufgestellt, der die Werte der Variablen  $x$  und  $y$  der eindeutigen Functionen genügen müssen, und die (unter) der linearen Substitutionen entwickelt, welche diese Functionen unverändert lassen.

E. PICARD. Sur les fonctions uniformes affectées de coupures. C. R. XCIV. 1405-1407.

Herr Weierstrass hat in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“ die analytische Darstellung jeder Function gegeben, die eine endliche Anzahl wesentlicher singulärer Punkte und eine beliebige Anzahl von Polen besitzt. Herr Picard giebt zwei Sätze, mit deren Hülfe diese Theorie mit einfachen Veränderungen, auf solche eindeutige Functionen ausgedehnt werden kann, die eine endliche Zahl von Schritten (Unstetigkeitslinien) haben, die als gerade Linien vorausgesetzt werden. Es zeigt sich, dass jede solche Function eine Summe von  $n$  Functionen ist, die nur eine solche Unstetigkeitslinie besitzen. Das zweite Theorem betrifft die Zerlegung in primäre Factoren.

E. GOURSAT. Sur les fonctions uniformes présentant des lacunes. C. R. XCIV. 715-718.

Die hier betrachteten eindeutigen Functionen haben die

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{1 - \frac{x}{a_{\nu}}},$$

wo  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\nu}, \dots$  eine unendliche Reihe imaginäre oder reeller willkürlicher Grössen und  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{\nu}, \dots$  eine zweite Reihe, in der kein Glied null und für die die Summe  $\sum c_{\nu}$  mod  $c_0$

hen Wert hat. Für jeden Punkt  $x_0$  innerhalb eines Bereichs  $A$  der Ebene, der keinen Punkt  $a$ , enthält, lässt sich  $P(x)$  in eine nach steigenden Potenzen von  $(x-x_0)$  fortschreitende Potenzreihe  $P(x-x_0)$  entwickeln. Wenn ein um  $x_0$  geschlagener Kreis den Punkt  $a$ , auf seiner Peripherie enthält, so ist es der Convergencekreis für die Reihe  $P(x-x_0)$ . M.

**SILDER.** Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Wert beliebig nahe kommt. in Ann. XX. 138-143.

Sei eine Function  $f(x)$  als Function einer complexen Variable eindeutig bestimmt in jedem Punkte eines Gebietes  $F$  mit Ausnahme eines darin gelegenen Punktes  $a$ , und  $f(x)$  sei zugleich in  $f(x)$  im ganzen Gebiete ausser  $a$  stetig. Alsdann können drei Fälle eintreten: 1) Es existirt eine Potenzreihe in  $x-a$ , so dass in der Umgebung von  $a$

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots;$$

2)  $f(x)$  kann in der Umgebung von  $a$  nach positiven und negativen Potenzen von  $x-a$  entwickelt werden, wobei die negativen in der Form auftreten:

$$f(x) = (x-a)^{-n} \{b'_0 + b'_1(x-a) + \dots\}, \quad n \text{ ganz.};$$

3)  $f(x)$  wird in unendlicher Nähe von  $a$  sowohl beliebig gross als auch beliebig klein. Dies wird mit Hülfe Weierstrass'scher Functionen bewiesen. Als Beispiele dienen  $e^{\frac{1}{x}}$ ,  $\sin \frac{1}{x}$  und  $\cos \frac{1}{x}$ ,

und  $\cotg \frac{1}{x}$ . Ist  $\varphi(x)$  eine eindeutige analytische Function in der Nähe einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen und  $\varphi(x)$   $2\pi$ -periodisch, so nimmt  $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$  in jedem den Nullpunkt umkreisenden Gebiet jeden Wert unendlich oft an.

M.



ändig mit den Gruppen mit reellen Substitutionen überein,  
 ie somit allein zur Betrachtung gezogen werden. Die hier-  
 bezeichnete Klasse von discontinuirlichen Gruppen ist es,  
 ie Poincaré als „groupes fuchsians“ bezeichnet, während er  
 lie allgemeinsten discontinuirlichen Gruppen linearer Sub-  
 ionen die Bezeichnung als „groupes kleinéens“ gewählt hat.  
 Der Ausgangspunkt, den der Verfasser für das Studium un-  
 Gruppen zu Grunde legt, ist die geometrische Deutung der  
 ren Substitutionen, für welche zunächst die allgemein be-  
 ten Sätze entwickelt werden. Mit Bezug auf die Gruppen  
 er Substitutionen seien dann irgend zwei Figuren in der  
 ene als „congruent“ bezeichnet, wenn sie durch eine reelle  
 re Substitution in einander übergeführt werden können.  
 e Definition bringt für die  $z$ -Ebene die Einführung einer  
 teuklidischen Massbestimmung mit sich, in welcher die Bogen-  
 e ( $z = x + iy$  gesetzt) durch das Integral

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y},$$

Flächeninhalt durch

$$\int \frac{dx dy}{y^2}$$

gedrückt wird. Die Entfernung zweier Punkte wird dabei  
 s des Kreisbogens gemessen, der, durch die beiden Punkte  
 end, auf der  $x$ -Axe senkrecht steht. Die Bedingung, nach  
 cher zwei Punkte  $\alpha, \beta$  in zwei andere  $\gamma, \delta$  übergeführt werden  
 nen, ist dann die der „Congruenz“ der entsprechenden Kreis-  
 en. Berücksichtigt man, dass bei Ueberführung von  $\alpha, \beta$   
 h  $\gamma, \delta$  gleichzeitig die zu  $\alpha, \beta$  conjugirten Punkte  $\alpha', \beta'$  in die  
 prehenden Punkte  $\gamma', \delta'$  übergehen, so lautet diese Be-  
 zung:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \cdot \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \cdot \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'}.$$

Bestimmung der Winkel bleibt in unserer Geometrie in der  
 ähnlichen Form enthalten. Es mag dabei noch die Bemerkung  
 eingeschaltet werden, dass die Formulierung unserer Massbe-





en zwei Kanten erster Art, und in solche, in denen eine Kante erster Art und eine Kante zweiter Art einlaufen. Die Kanten erster Art eines „Ausgangspolygons“ der Einteilung müssen dabei paarweise durch Substitutionen der Gruppe einander zugeordnet sein. Die Substitutionen, welche die sämtlichen Kanten erster Art des Ausgangspolygons einander zuordnen, bilden dabei ein System der „erzeugenden Substitutionen“ der Gruppe; sie liegen in der Form

$$(z, f_i(z))$$

beschrieben sein. Zwischen diesen erzeugenden Substitutionen steht eine Reihe von Relationen der Form

$$z = f_{a_1}(f_{a_2}(\cdots f_{a_v}(z)\cdots)),$$

man erhält, wenn man alle Ecken des Ausgangsgebietes mit einem geschlossenen Wege umgibt und diese Wege durch entsprechenden Substitutionen (nach den dabei durchlaufenen Gebieten) charakterisiert. Die Bemerkung, dass zwar durch eine gegebene reguläre Einleitung die zugehörige Gruppe völlig bestimmt, nicht aber umgekehrt durch eine gegebene Gruppe reeller linearer Substitutionen die zugehörige Einteilung, lässt gewisse Normalformen einer solchen Einteilung formulieren, die den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Man zeigt nämlich (§ 4), dass die Einteilung stets, und noch auf unendlich viele Weisen, in der Form hergestellt werden kann, dass die einzelnen Gebiete von Kreisbögen begrenzt erscheinen, die auf der Axe senkrecht stehen. Es wird nun (in § 5) eine erste Klassifikation der verschiedenen Arten von Gebietseinteilungen getroffen, und zwar nach der Anordnung der einzelnen Eckpunkte derselben zu „Cyklen“. Der Verfasser definiert nämlich einen „Cyklus von Eckpunkten“ folgendermassen: Man gehe von einem Eckpunkte der Einteilung, bezeichne (den Rand des betreffenden Ausgangspolygons in einem bestimmten Sinne durchlaufend) die anstossende Kante, dann gehe man zu der ihr in diesem Polygon zugeordneten Kante (sofern dieselbe erster Art ist), dann zum angrenzenden Eckpunkt, zur hier anstossenden Kante, zu deren conjugirten, u. s. w. Schliesslich kommt man entweder zu einer Kante zweiter Art, wo dann der Cyklus der durch-



viel principiellere Bedeutung besitzt, als die vorhergenannte **sification** nach Familien, ist die nach dem Geschlechte, deren Formulirung von Klein herrührt. Denkt man sich nämlich paarweise Zuordnung der Kanten erster Art im Ausgangspolygon durch Zusammenbiegen der Ränder wirklich ausgeführt, entsteht eine Fläche, die jetzt bis auf die von den Kanten zweiter Art gebildeten Oeffnungen geschlossen ist, und deren Geschlecht sich sofort aus den bekannten Formeln herleitet.

Nachdem in § 9 die vorhin erwähnte Möglichkeit der Deformation der Gebietseinteilung auch an Beispielen erläutert und Familie, Geschlecht und gewisse Eigenschaften der Cyklen als unveränderlich bei solchen Deformationen erwiesen sind, geht

Verfasser in § 10 auf den Isomorphismus der Gruppen näher ein. Zwei Gruppen können nämlich dann und nur dann auf einander isomorph bezogen werden, wenn die Zahl ihrer erzeugenden Substitutionen für beide dieselbe ist, und ausserdem die selben jenen statthabenden Relationen für beide Gruppen übereinstimmen. Insofern nun die Anzahl jener Fundamentalrelationen mit der Zahl der Cyklen erster Art des Ausgangspolygons übereinstimmt, kann man sofort gewisse Schlüsse auf die Möglichkeit einer isomorphen Beziehung machen, wobei insbesondere Gruppen hervorgehoben werden, für welche überhaupt keine Relationen existiren.

Nun handelt es sich noch darum (§ 11), nachdem gezeigt wird wie aus den geometrischen Daten des Ausgangspolygons die linearen Substitutionen  $z = f_i(z)$  gebildet werden können, die Charakteristik aller möglichen Ausgangspolygone einer bestimmten Familie und einer bestimmten Anzahl erzeugender Substitutionen zu bilden. Der zunächst geometrisch aus den verschiedenen Gestalten der Fundamentalpolygone erschlossene Charakter giebt die Bedingungen (Ungleichungen) für die Coefficienten der linearen Substitutionen, welche als die erzeugenden Substitutionen der entsprechenden linearen Gruppe auftreten. Die Durchführung dieser Aufgabe ist nicht in abstracto gegeben, sondern an eine Reihe einzelner Beispiele angeschlossen, welche die verschiedenen Möglichkeiten zu behandeln bestimmt sind.



Replik auf einige von Herrn Klein im Anschluss an die Poincaré'sche Arbeit „Sur les fonctions uniformes etc.“ in Klein Bd. XIX. (siehe das folgende Referat) gemachte Bemerkungen, die von Poincaré in die Theorie der eindeutigen Functionen eingeführte Nomenclatur betreffend. Dk.

KLEIN. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. Klein Ann. XIX. 565-560, XX. 49-52.

HURWITZ. Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen anzahliger linearer Transformationen bilden.

Klein Ann. XX. 125-135.

RAUSENBERGER. Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden. Klein Ann. X. 187-213.

SCHOTTKY. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. Klein Ann. XX. 293-300.

Die Klasse von Functionen, auf welche sich die vorstehenden Arbeiten beziehen, hat neuerdings das Interesse der Mathematiker vielfach in Anspruch genommen. Dieselbe findet ihren Ursprung in folgender Fragestellung: Man bezeichne mit

$$S_1(\eta) = \frac{\alpha_1 \eta + \beta_1}{\gamma_1 \eta + \delta_1}, \quad S_2(\eta) = \frac{\alpha_2 \eta + \beta_2}{\gamma_2 \eta + \delta_2}, \dots$$

Reihe von linearen Transformationen der Veränderlichen  $\eta$  frage nun nach solchen eindeutigen Functionen  $\varphi(\eta)$ , welche den Gleichungen

$$\varphi(S_i(\eta)) = \varphi(\eta) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Genüge leisten, ohne übrigens aber ihren Wert im Allgemeinen verändern, wenn  $\eta$  einer nicht in der Reihe  $S_1(\eta), S_2(\eta), \dots$  enthaltenen Transformation unterworfen wird. Man erkennt leicht, dass nicht zu jedem willkürlich angenommenen Systeme von Transformationen  $S_1(\eta), S_2(\eta), \dots$  Functionen  $\varphi(\eta)$  gehören. Es







einander nicht schneidenden Curven, welche unbeschadet Allgemeinheit als Kreise angenommen werden können, besteht ist. Diese Curven gehören paarweise zusammen, und zwar jede aus der zugehörenden durch eine lineare Transformation hervor. Die Zulässigkeit der von diesen Transformationen gebildeten Gruppe ist geometrisch evident. Das Hauptresultat, zu welchem Herr Klein in seiner Note gelangt, lässt sich nun folgenmassen formuliren: „Die  $2p$  Begrenzungscurven der Parcellen lassen sich so bestimmen, dass zwei zu der entstehenden Gruppe gehörende Functionen  $w(\eta)$  und  $z(\eta)$  existiren, welche eine beliebig vorgelegte algebraische Gleichung  $f(w, z) = 0$  vom Grade  $p$  identisch befriedigen.“ Die genannten Functionen besitzen unendlich viele wesentlich singuläre Stellen, welche zerstreut über die  $\eta$ -Ebene (Kugel) zerstreut liegen. Eine besondere Berücksichtigung erfahren die algebraischen Gleichungen mit reellen Coefficienten.

Die zweite Note enthält ein ähnliches Theorem. Die Parzellen-Einteilung, welche hier in Betracht kommt, bezieht sich jedoch nur auf eine Kalotte der  $\eta$ -Kugel. Der Begrenzungskreis der Kalotte trägt unendlich viele überall unendlich dicht liegende singuläre Punkte der zugehörigen Functionen, und bildet daher die letzteren eine natürliche Grenze.

Die dritte Arbeit (deren Abfassung in eine frühere Zeit fällt) beschäftigt sich mit specielleren hierher gehörigen Functionen. Sie knüpft an das Princip der Symmetrie des Herrn Schwarz an, welches zu einer unendlichen Zahl von zulässigen Gruppen hinleitet. Aus diesen werden die einfachsten ausgewählt, welche zu bislang nicht behandelten Functionen führen. Zur Anzeichnung dieser Gruppen reicht es hin, die betreffende Ausgangsparcette  $P$  anzugeben. Dieselbe besteht aus einem  $n$ -Eck-Vierecke, mit den Winkeln  $(0, \frac{\pi}{n}, \pi, \frac{\pi}{n})$ , wo  $n$  eine ganze Zahl bedeutet. Der Fall  $n = 3$  ergiebt die Gruppe aller dreizahligen linearen Transformationen der Determinante 1, also die bekannte Function  $J(w)$  (oder in der hier gewählten Bezeichnung  $J(\eta)$ ), welche als die absolute Invariante des elliptischen Integrals erster Gattung definirt werden kann. Es werden nun



genügt, die letzteren Fälle aufzuzählen. Diese sind, unter  $n$  ganze Zahl verstanden:

$$1) \quad b = 0, \quad a = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n}} \quad (\text{vgl. die Arbeit von Hurwitz}),$$

$$2) \quad b = 0, \quad a = \frac{-1}{4 \cos^2 \frac{2\pi}{n}} \quad (\text{ausgenommen } n = 3, 4),$$

$$3) \quad b = 0, \quad \text{mod. } a \leq \frac{1}{4}, \quad (\text{hier sind selbst complexe Werte } a \text{ zulässig}).$$

Schliesslich ist zu bemerken, dass nur der Fall  $\text{mod. } a \leq \frac{1}{4}$ , beliebig, wegen der sich darbietenden Schwierigkeiten nicht vollständig erledigt werden konnte. (Inzwischen hat Herr Rausenberger diese Lücke in einer neueren Arbeit ausgefüllt).

Der Auszug aus einem Briefe des Herrn Schottky an Herrn Klein enthält einige Mittheilungen, welche sich darauf beziehen, wie sich nach Inhalt und Entstehung die Arbeit des Herrn Schottky über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Flächen zu den späteren Arbeiten über eindeutige Functionen zu linearen Transformationen in sich verhält. Hz.

FUCHS. Ueber Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben. Gött. N. 1882. 81-84.

Erwiderung auf die Note, welche Herr Klein der Arbeit von Poincaré „Sur les fonctions uniformes“ etc. (Klein Ann. IX.) beigelegt hat. Der Verfasser fixirt seinen Anteil an der Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich. Man vergl. hierzu noch die Note von Poincaré „Sur les fonctions uniformes etc.“ im XX. Bande der math. Annalen und die Bemerkungen von Klein in dessen Abhandlung „Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie“. Klein Ann. XXI. p. 143 und 214. Dk.

E. PICARD. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. C. R. XCV. 594-597.

Siehe Abschn. VI. Cap. 6. p. 291.

E. PICARD. Sur un groupe de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 837-840.

Herr Picard hat in einer Note „Sur certaines fonctions formes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires“ (C. R. XCIV. p. 579; vgl. diesen Bd. p. 335) gewisse discontinuirliche Gruppen linearer Transformationen bei zwei Veränderlichen aufgestellt von der Form:

$$\left( u, v, \frac{A_3 + B_3 v + C_3 u}{A_1 + B_1 v + C_1 u}, \frac{A_2 + B_2 v + C_2 u}{A_1 + B_1 v + C_1 u} \right),$$

für welche die  $A_i, B_i, C_i$  mit dritten Einheitswurzeln gebildete complexe ganze Zahlen sind, und für welche, unter  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  zu  $A_i, B_i, C_i$  conjugirten Zahlen verstanden, die Relationen

$$C_1 \gamma_2 + C_2 \gamma_2 + C_3 \gamma_3 = A_1 \beta_2 + A_2 \beta_1 + A_3 \beta_3 = K$$

und

$$A_1 \alpha_2 + A_2 \alpha_1 + A_3 \alpha_3 = 0 \text{ etc.}$$

bestehen. In Verbindung mit den in der früheren Abhandlung gegebenen Beziehungen erweist sich nun zunächst  $K$  von der Form  $a^2 - ab + b^2$ . Betrachtet man dann einmal Substitutionen  $T$  mit  $K = 1$ , und zweitens die allgemeinen  $S, S'$ , für welche  $S$  von  $S'$  verschieden, und bezeichnet zwei Substitutionen  $S, S'$  als „äquivalent“, für welche  $S' = ST$ , so ergibt sich hieraus für jedes  $K$  eine Einteilung der zugehörigen Substitutionen in nicht äquivalente Substitutionen. Für  $K$  Primzahl werden die Typen dieser Systeme, sowie die Anzahl derselben  $[= 2K(K+2)]$  bestimmt. Dk.

H. POINCARÉ. Sur les groupes discontinus. C. R. XCIV. 840-843.

Herr Picard hat in einigen Noten in den Comptes rendus

ersten Beispiele für discontinuirliche Gruppen gebrochener linearer Substitutionen bei zwei Veränderlichen gegeben. (Man vgl. Comptes rendus vol. XCIV. p. 579 u. 837; vergl. diesen Band 335 u. 350; man vergl. ferner die inzwischen veröffentlichten früheren hierher gehörigen Abhandlungen von Picard in den Comptes rendus von 1883, den Acta mathematica vol. 1 und 2 und den Annales de l'école normale.) Herr Poincaré zeigt in vorstehender Note, wie man durch zahlentheoretische, algebraische und geometrische Betrachtungen auf unendlich viele derartige Gruppen geführt wird.

Einmal ergibt die Theorie der quadratischen Formen für die quadratische Form  $F(x, y, z)$  mit ganzzahligen Coefficienten sofort unendlich viele Substitutionen

$$(1) \quad (x, y, z, ax + by + cz, a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z)$$

mit ganzzahligen Coefficienten, welche die obige Form in sich überführen; aus ihnen ergibt sich dann sofort eine discontinuirliche Gruppe linearer Substitutionen bei zwei Veränderlichen in der Form

$$(2) \quad \left( x, y, \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''} \right),$$

und dieselbe Regel ist auch auf Formen mit complex-ganzzahligen Coefficienten ausdehnbar.

Zweitens lässt sich aus jeder Gruppe linearer Substitutionen der Veränderlichen mit reellen Coefficienten

$$(3) \quad \left( t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \right)$$

die entsprechende (isomorphe) Gruppe für zwei Veränderliche erstellen. Man betrachte nämlich etwa die quadratische Form

$$z^2 - xy$$

und setze  $t$  als der Gleichung

$$xt^2 - 2zt + y = 0$$

genügend voraus. Führt man dann die obigen Substitutionen (3) in die letzte Gleichung ein, so ergibt dieselbe eine lineare Transformation der Coefficienten  $x, y, z$  derselben von der obigen Form (1), und aus ihr folgt wieder eine Gruppe linearer Transformationen



$$f(\theta, z) \equiv \theta^n + b_1 \theta^{n-1} + \dots + b_{n-1} \theta + b_n = 0,$$

die  $b$  rationale Functionen von  $z$  sind, so hat das System rationalen Functionen von  $\theta$  und  $z$  die Eigenschaft, dass sich durch Anwendung der vier Species auf seine Individuen reducirt, und wird deshalb als ein Körper algebraischer Functionen  $\Omega$  vom Grade  $n$  bezeichnet. Jede Function  $\xi$  desselben lässt sich stets und nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$\xi = x_0 + x_1 \theta + \dots + x_{n-1} \theta^{n-1},$$

die  $x$  rationale Functionen von  $z$  sind, und umgekehrt gehen alle Functionen von dieser Form dem Körper  $\Omega$  an; alleiniger lässt sich  $\xi$  linear und homogen durch irgend  $n$  Functionen  $\eta_1, \dots, \eta_n$  (Basis) des Körpers  $\Omega$  darstellen, dann und nur dann, wenn  $\eta_1, \dots, \eta_n$  rational unabhängig sind (ein rational irreducibles System bilden), d. h. wenn zwischen  $\eta_1, \dots, \eta_n$  keine Relation

$$y_1 \eta_1 + \dots + y_n \eta_n = 0$$

in  $z$  rationalen  $y$  besteht, ohne dass die  $y$  sämtlich verschwinden. Jede Function  $\xi$  in  $\Omega$  genügt einer irreduciblen Gleichung mit in  $z$  rationalen Coefficienten, deren Grad  $n$  oder Teiler von  $n$  ist; eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n = 0$$

erhält man, indem man unter Zugrundelegung einer beliebigen

Basis  $\eta_1, \dots, \eta_n$  das Gleichungssystem  $\xi \eta_i = \sum_{\lambda=1}^n y_{i\lambda} \eta_\lambda$  aufstellt und

$\eta_1, \dots, \eta_n$  hieraus eliminirt;  $N(\xi) \equiv (-1)^n b_n = \Sigma \pm y_{11} \dots y_{nn}$  heisst

die Norm von  $\xi$ ,  $S(\xi) \equiv b = \sum_{\lambda=1}^n b_{\lambda\lambda}$  die Spur von  $\xi$ ; für Norm

und Spur existiren sehr einfache Sätze; hervorgehoben sei die Beziehung  $\varphi(t) = N(t - \xi)$ , wo  $t$  eine willkürliche Grösse bedeutet; ferner:  $\varphi(t)$  ist entweder irreducibel oder eine ganze Potenz einer irreducibeln Function. Discriminante von  $n$  Functionen  $\eta_1, \dots, \eta_n$  in  $\Omega$  heisst die rationale Function von  $z$ :

$$D(\eta_1, \dots, \eta_n) \equiv \Sigma \pm S(\eta_1 \eta_1) \dots S(\eta_n \eta_n).$$

Ist  $\eta_1, \dots, \eta_n$  eine Basis von  $\Omega$  und  $\eta'_1, \dots, \eta'_n$  irgend ein System von Functionen in  $\Omega$ , so ist

$$D(\eta'_1, \dots, \eta'_n) = X^2 D(\eta_1, \dots, \eta_n),$$





durch  $b$  teilbar,  $b$  ein Teiler von  $a$  etc. (Der Teiler ist umfänglicher als das Vielfache; damit stimmt die von den Zahlen  $a$  und  $b$  gewohnte Anschauung, wenn man statt der Zahlen  $a$  und  $b$  die Systeme  $0, \pm a, \pm 2a, \dots$ , resp.  $0, \pm b, \pm 2b, \dots$  nimmt.) Alle Functionen, die in  $a$  und  $b$  enthalten sind, bilden ebenfalls einen Modul, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von  $a$  und  $b$ ; dasselbe gilt für den grössten gemeinschaftlichen Teiler, d. h. den Inbegriff aller Functionen  $\alpha + \beta$ , wo  $\alpha$  und  $\beta$  irgend welche Functionen aus  $a$ , resp.  $b$  sind. Unter Product von  $a$  und  $b$  versteht man ferner den Inbegriff sämtlicher Functionen  $\Sigma \alpha \beta$ , der ebenfalls ein Modul ist und zwar ein endlicher, wenn  $a$  und  $b$  es sind. Es ist zwar  $ab = ba$ ,  $abc = acb = \dots$ , aber  $ab$  braucht nicht durch  $a$  teilbar zu sein, dagegen ist, falls  $a$  durch  $a_1$ ,  $b$  durch  $b_1$  teilbar ist, auch  $ab$  durch  $a_1 b_1$  teilbar. Endlich ist  $\frac{b}{a}$  der Inbegriff aller Functionen  $\gamma$  von der Art, dass  $\gamma a$  durch  $b$  teilbar ist, und ebenfalls ein Modul;  $\frac{b}{a} \cdot a$  ist durch  $b$  teilbar, wenn auch  $a$  nicht immer gleich  $b$ . Aus der Definition des Teilers ist klar, was unter der Congruenz  $\alpha \equiv \beta \pmod{a}$  zu verstehen ist. Hieran schliesst sich dann unmittelbar die Definition eines vollständigen Restsystems des Moduls  $b$  nach  $a$ . Von Wichtigkeit ist ferner der Begriff der Norm  $(b, a)$  von  $a$  in Bezug auf  $b$ ; es ist dies eine gewisse rationale, in bestimmter Weise herzustellende Function von  $z$ , welche die Eigenschaft hat, dass durch Multiplikation mit ihr jede Function von  $b$  in eine Function von  $a$  verwandelt wird. Für die Norm wird eine Reihe von Sätzen abgeleitet. Das für die vorliegende Theorie wichtigste Gebilde, das Ideal, ist eine besondere Art von Modul; ein System  $\mathfrak{a}$  von ganzen Functionen von  $z$  in  $\Omega$  heisst ein Ideal, wenn 1) Summe und Differenz je zweier Functionen in  $\mathfrak{a}$  wieder eine Function in  $\mathfrak{a}$  ergeben, 2) das Product einer jeden Function in  $\mathfrak{a}$  mit einer jeden Function in  $\mathfrak{o}$  wieder eine Function in  $\mathfrak{a}$  ist. Der Modul  $\mathfrak{o}$  ist selbst ein Ideal, und jedes Ideal ist durch  $\mathfrak{o}$  teilbar, wie überhaupt  $\mathfrak{o}$  in der Theorie der Ideale die Rolle der Einheit spielt. Bedeutet  $\mu$  eine beliebige Function in  $\mathfrak{o}$ , so ist das System  $\mathfrak{o}\mu$



er Wichtigkeit einer eingehenden Untersuchung unterworfen  
 l. Auf Grund dieser Theorie der ganzen Functionen in  $\Omega$   
 len nun auch die gebrochenen Functionen untersucht. Den  
 uss der ersten Abteilung bildet die Behandlung der rationalen  
 nsformationen der Functionen des Körpers  $\Omega$ , aus der sich  
 Berechtigung ergibt, an Stelle der unabhängigen Veränder-  
 en  $z$  jede beliebige Function des Körpers als unabhängige  
 iable der Betrachtung zu Grunde legen zu dürfen, wenn es  
 die Erhaltung der Gesamtheit der Functionen des Körpers  
 ommt; die Begriffe: Basis, Norm, Spur, Discriminante, ganze  
 unction, Modul, Ideal sind allerdings wesentlich abhängig von  
 Wahl der unabhängigen Variablen  $z$ .

Sind die soweit geführten Betrachtungen über die Functionen  
 Körpers  $\Omega$  rein formaler Natur, d. h. bewegten sie sich überall  
 im Gebiete der rationalen Rechnungsoperationen, ohne die  
 nerischen Werte der Functionen in Betracht zu ziehen, so  
 nght sich nun die Frage auf, welche an die Spitze der zweiten  
 eilung gestellt wird: „In welchem Umfange ist es möglich,  
 Functionen in  $\Omega$  solche bestimmte Zahlenwerte beizulegen,  
 s alle zwischen diesen Functionen bestehenden rationalen  
 ationen (Identitäten) in richtige Zahlengleichungen übergehen?“  
 diesem Zwecke wird folgende, zunächst ganz abstrakte Defi-  
 on aufgestellt: Wenn alle Individuen  $\alpha, \beta, \dots$  des Körpers  $\Omega$   
 ch bestimmte Zahlenwerte  $\alpha_0, \beta_0, \dots$  so ersetzt werden,  
 s (I.)  $\alpha_0 = \alpha$ , falls  $\alpha$  eine Constante ist, und allgemein

$$(II.) (\alpha + \beta)_0 = \alpha_0 + \beta_0, \quad (III.) (\alpha - \beta)_0 = \alpha_0 - \beta_0,$$

$$(IV.) (\alpha \cdot \beta)_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0, \quad (V.) \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

nd. so soll einem solchen Zusammentreffen bestimmter Werte  
 „Punkt“  $P$  zugeordnet werden, und wir sagen, in  $P$  sei  
 $\alpha = \alpha_0$ , oder  $\alpha$  habe in  $P$  den Wert  $\alpha_0$ . Zwei Punkte heissen  
 ts und nur dann verschieden, wenn eine Function  $\alpha$  in  $\Omega$  exi-  
 rt, die in beiden Punkten verschiedene Werte hat. Es sind  
 n die Primideale, die den Uebergang von dieser Definition des  
 nktes zum Nachweise seiner Existenz vermitteln. Ist nämlich  
 irgend eine in  $P$  endliche Variable, so ist der Inbegriff  $p$  aller



von Herrn Klein gegebenen Darstellung innewohnt. Was die Länge der Untersuchung angeht, so wird zunächst im ersten Abschnitt die physikalische Deutung der Functionen eines complexen Argumentes ausführlich studirt, bei welcher der reelle Theil der Function als Geschwindigkeitspotential einer stationären Strömung in der Ebene, deren Punkte die Werte des Argumentes symmetrisch repräsentiren, betrachtet wird. Die rationalen Functionen und ihre Integrale geben hier zweckmässige Beispiele; sie liefern alle einförmigen Strömungen, bei welchen durch jeden Punkt der Ebene im Allgemeinen nur eine Strömungslinie geht. Der Uebergang von der Ebene zur Kugel beseitigt einmal die Ausnahmestellung, welche in der Ebene der Punkt  $z = \infty$  einnimmt, dass nunmehr auf der Kugel der Verlauf der Strömungen vollständig überblickt werden kann. Es schliesst sich an diesen Uebergang aber auch sofort die Fragestellung an, welche als die Riemann'sche bezeichnet wird, und aus der sich alles Weitere entwickelt: Man nehme eine beliebige geschlossene Fläche im Raume; welche einförmigen Strömungen existiren auf derselben? Diese Strömungen führen offenbar zu einer wohlumgrenzten Classe von Functionen, deren Eigenschaften unmittelbar durch die Anschauung der zugehörigen, die Functionen definirenden Strömungen erkannt werden. Die Ausführung dieser Idee und damit die Entwicklung der Riemann'schen Theorie enthält der zweite Abschnitt der Schrift. Die geschlossenen Flächen werden zuerst nach der Zahl  $p$  der sie nicht zerstückenden Rückkehrschnitte eingetheilt und der weiteren Betrachtung bestimmte Normalflächen (für das Geschlecht  $p$  eine Kugel mit  $p$  Anhängseln) zu Grunde gelegt. Die physikalische Anschauung lehrt nun die allgemeinsten auf einer solchen Normalfläche existirenden einförmigen Strömungen kennen. Es ergeben sich dann die Sätze der Riemann'schen Theorie einfach durch Uebertragung der anschauungsmässig erkannten Eigenschaften dieser Strömungen auf die durch dieselben definirten Functionen. Der Uebergang von der Normalfläche zu der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche, welcher durch die eindeutigen unter den gefundenen Functionen vermittelt werden kann, ist für den Fall  $p = 1$  auch rechnerisch durchgeführt,



2) in Vergleich zu ziehen gewesen; übrigens finden auch hier Bemerkungen von Prym über die Durchführbarkeit der abenden Methoden in speciellen Fällen in der gleichfalls diesen nann'schen Satz betreffenden Abhandlung im LXXXIII. Band Borchardt J. p. 253 Anwendung (siehe F. d. M. IX. (1877) 84.). Dk.

CASORATI. Sopra il teorema di Jacobi. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 623-631.

Der Verfasser hat schon früher (C. R. Dec. 1863 u. Jan. 1864) auf aufmerksam gemacht, dass das Theorem von Jacobi, nach eine Function einer Variablen mit mehr als zwei Perioden möglich ist, zu beschränken sei auf Functionen, die für jeden rt der Variable nur einen oder nur eine endliche Zahl von rten habe, was Jacobi vermutlich ebenso aufgefasst, aber ht ausdrücklich hervorgehoben habe. Da diese Bemerkungen wenig beachtet und zum Teil nicht verstanden wurden, will Verfasser in weiteren Mittheilungen nochmals die Existenz dytischer Functionen einer Variablen mit mehrfacher Periodi- it und die Möglichkeit der Umkehrung eines einzelnen Inte- ls zeigen. H. St.

SCHUMANN. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppelt-periodischen Functionen betreffend. Schlömilch Z. XXVII. 125-126.

Der Satz von Liouville, dass sich die Summe der Pole von Summe der Nullpunkte in einem elementaren Periodenparallelogramm um eine vollständige Periode unterscheidet, wird her- leitet aus dem Integral  $\int z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ , das über die Umgren- ng eines solchen Parallelogramms, dessen Ecken den Werten

$$z_0, z_0 + \omega, z_0 + \omega + \omega', z_0 : \omega'$$

entsprechen, ausgedehnt wird.

M.

L. GEGENBAUER. Ueber die doppelt-periodischen Functionen zweiter Art. Wien. Ber. LXXXVI. 969-975.

Stellt man eine doppelt-periodische Function einmal Form eines Quotienten zweier Producte von Jacobi'schen Functionen  $H$  dar, und zweitens mit Hülfe einer Function, nur an einer einzigen Stelle und den congruenten von der Ordnung unendlich wird, und ihrer successiven Ableitungen eine Form, welche der Partialbruchzerlegung rationaler Functionen entspricht, so besteht zwischen den in diesen Darstellungen auftretenden Grössen eine lineare Relation. Einen speziellen Fall für diesen hier bewiesenen Satz liefert die von F. Brioschi (C. R. XCII. 1881. 325., s. F. d. M. XIII. (1881) bewiesene Relation zwischen den Grössen  $\omega$ , die in den Ausdrücken für die der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{du^2} = [n(n+1)k^2 sn^2 u + h]y$$

genügenden Functionen enthalten sind.

---

O. RAUSENBERGER. Zur Theorie der Functionen mehrerer nicht vertauschbaren Perioden. Kle. XX. 47-49.

Ist  $f(x)$  eine eindeutige Function, welche den Functiongleichungen

$$f(x+1) = f(x), \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

genügt, (Modulfunction), so genügt jede Function  $F(x)$ , die sich rational aus  $f(x\sqrt{n})$  und  $f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$  zusammensetzt, denselben Functiongleichungen

$$F(x + \sqrt{n}) = F(x) \quad \text{und} \quad F\left(-\frac{1}{x}\right) = F(x);$$

oder sie besitzt, wie man sich ausdrücken mag, die Perioden  $\sqrt{n}$  und  $-\frac{1}{x}$ . Wie sich dieses Beispiel in die



nen Conceptionen über eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich einordnet, sehe man einerseits in der früheren Abhandlung desselben Verfassers: „Ueber eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden“ (Klein Ann. XX. p. 187. und diesen Band p. 345), andererseits in den viel allgemeineren Gesichtspunkten ausgehenden Arbeiten Poincaré und Klein über die Theorie der eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich. Dk.

**RAUSENBERGER.** Ueber periodische Functionen zweiter Gattung. Klein Ann. XX. 550-557.

Herr Rausenberger definirt im XVIII. Bande der Math. Ann. die Arbeit: „Theorie der allgemeinen Periodicität“ als „periodische Function“ eine Function  $F(x)$ , welche der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

erfüllt, wo  $\varphi_1(x)$  eine beliebige algebraische Function bedeutet (F. d. M. XIII. (1881) p. 317). Hieran knüpft er jetzt die Bezeichnung „periodischer Functionen zweiter Gattung“, definirt dieselben durch eine oder mehrere Functionalgleichungen

$$F[\varphi_1(x)] = \psi_1[F(x)],$$

wo  $\varphi_1(x)$  und  $\psi_1(x)$  allgemein algebraische Functionen bedeuten. In der vorliegenden Abhandlung sind diese Functionen insbesondere als lineare vorausgesetzt. Mit Bezug auf diese Functionen wird nun die schon für jene periodischen Functionen erster Gattung beantwortete Frage gelöst nach allen eindeutigen, einfach oder mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattung mit einer endlichen Anzahl von wesentlichen Discontinuitätsstellen.

Die einfach periodischen Functionen zweiter Gattung lassen sich sofort auf vier Normalformen zurückführbar:

- (1)  $F(x+1) = F(x) + 1,$
- (2)  $F(x+1) = q \cdot F(x).$
- (3)  $F(p \cdot x) = F(x) + 1,$
- (4)  $F(p \cdot x) = q \cdot F(x),$



reichung zwischen genannten Grenzen geben. Wenn die Aufgabe diese letzte zurückgeführt worden ist, wird sie durch die-  
 en Betrachtungen gelöst, von denen der Verfasser in seiner  
 andlung: Sur les questions de minima qui se rattachent à la  
 représentation approximative des fonctions (Mémoires de l'Acad.  
 des Sciences de St. Pétersb. sixième série. Sciences mathé-  
 liques et physiques. T. VII.) Gebrauch gemacht hatte, und  
 in dem „Calcul différentiel“ von Bertrand S. 512-521 ange-  
 rt sind.

Dieselbe Aufgabe wird auch in Bezug auf die trigonometrische  
 unction

$$A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \dots + A_n \cos n\varphi \\ + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + \dots + B_n \sin n\varphi$$

löst.

Ty.

J. STIELTJES jr. Over de transformatie van der pe-  
 riodische functie

$$A_0 + A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi + \dots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Nieuw Arch. IX. 111-116

Einfache Entwicklung in Factoren von Ausdrücken obiger  
 Form; für  $n = z$  und unter der Voraussetzung, dass der Aus-  
 druck für keinen Wert von  $\varphi$  gleich Null wird, hat man die  
 Entwicklung bei der Störungsfunction schon lange angewendet.  
 Hier bleibt die Form allgemein und so wird die Entwicklung  
 angewendet, welche nachher durch ein Beispiel erklärt wird.

G.

L. ASCOLI. Una osservazione relativa ad un teorema  
 contenuto nella mia Memoria: „Sulla rappresentabilità  
 di una funzione a due variabili per serie doppia tri-  
 gonometrica.“ Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 543-546.

Verbesserung eines Lemma über die Reihe  $\sum_{\mu} \sum_{\nu} c_{\mu}^{(\nu)}$ , das  
 § 3 Nr. 1 der oben genannten Abhandlung nicht ganz correct  
 ausgesprochen war.

M.

LAGUERRE. Sur la distribution, dans le plan, des racines d'une équation algébrique dont le premier membre est satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. XCIV. 412-414, 509-511.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 54.

---

## Capitel 2.

### Besondere Functionen.

#### A. Elementare Functionen.

PEROTT. Sur la recherche des diviseurs des fonctions entières. S. M. F. Bull. X. 250-251.

Angabe eines Verfahrens, welches die Zerlegung eines Polynoms

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

mit ganzzahligen Coefficienten in seine Primfactoren aus einer unendlichen Anzahl von Versuchen ergibt. Di

---

ST. RYCHLICKI. Ein Beitrag zum Rationalmachen der Summe von 2<sup>ten</sup> Wurzeln. Hoppe Arch LXVIII. 180-181.

Es werden zunächst die expliciten rationalen Ausdrücke entwickelt, welche den algebraischen Summen von 2, 3, 4 Quadratwurzeln entsprechen; sodann wird die Form des rationalen Ausdrucks discutirt, der für die Summe von  $n$  Quadratwurzeln erscheint; und zuletzt finden sich einige Bemerkungen über den in der Ueberschrift bezeichneten allgemeinsten Fall.

St

---

PEROTT. Sur un théorème de Gauss. S. M. F. Bull. X.

Es wird ein neuer Beweis für den Gauss'schen Satz (

Es quarundam serierum singularium) gegeben, dass, wenn  $m$  und  $\mu$  ganze Zahlen und  $m > \mu$  ist, der Ausdruck

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1}) \dots (1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2) \dots (1-x^\mu)}$$

eine ganze Function von  $x$  ist.

M.

**DZIOBEK.** Ueber diejenigen Functionen von sechs Variabeln, welche die Eigenschaft haben, bei Vertauschung derselben nur sechs verschiedene Werte anzunehmen, ohne in Bezug auf fünf derselben symmetrisch zu sein. Hoppe Arch. LXVIII. 225-255.

Es werden die einfachsten Formen solcher Functionen aufgestellt. Dieselben lassen sich für die Darstellung der Invarianten der linearen Formen sechsten Grades verwerten. Indem ferner der Punkt eines Kegelschnittes

$$xz - y^2 = 0$$

durch einen Parameter  $\alpha$  mittels der Formeln

$$x = 1, y = \alpha, z = \alpha^2$$

hergestellt wird, ergeben sich Anwendungen der genannten Functionen auf die Theorie des Pascal'schen Sechsecks. M.

**J. HALPHÉN.** Sur une série d'Abel. S. M. F. Bull. X. 67-87.

Die Resultate dieser Abhandlung sind bereits früher C. R. Math. III. 1003-1005 veröffentlicht worden; wir verweisen deshalb auf das betreffende Referat in F. d. M. XIII. (1881) p. 180.

M.

**H. A. SCHWARZ.** Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires.

Torino, Att. XVII. 740-743

Ein eleganter, nur elementare Hilfsmittel benützender Beweis der Formel

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} f^{(-1)}(u),$$

in welcher, für  $f(t)$  als Ausgangsfunction,

$$f(t_1, t_2) = \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2},$$

$$f(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1, t_2) - f(t_1, t_3)}{t_2 - t_3} \text{ u. s. w.}$$

gesetzt ist, wo ferner  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  eine reelle W  
 $u$  einen Zwischenwert derselben bezeichnet

M. LERCH. Bemerkungen über den Quotienten -

Cas. XI. 292-204. (Böhmisch).

Enthält die Ableitung und eine Anwendung der Fo

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \dots \text{ in inf. } \cdot$$

J. W. L. GLAISHER. Une identité trigonométrique

Ass. fr. 1880.

Die hier betrachtete Identität lautet:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\sin(a-h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\sin(b-h)}{\sin(b-a)\sin(b-c)} \\ & + \frac{\sin(c-f)\sin(c-g)\sin(c-h)}{\sin(c-a)\sin(c-b)} + \frac{\sin(f-a)\sin(f-b)\sin(f-h)}{\sin(f-g)\sin(f-c)} \\ & + \frac{\sin(g-a)\sin(g-b)\sin(g-c)}{\sin(g-f)\sin(g-h)} + \frac{\sin(h-a)\sin(h-b)\sin(h-c)}{\sin(h-f)\sin(h-g)} \end{aligned}$$

wo  $a, b, c, f, g, h$  irgend welche Grössen sind. Für letzte  
 $\sin^2 a, \sin^2 b, \dots$ , gesetzt; alsdann ergibt sich eine  
 Identität.

S. GÜNTHER. Parabolische Logarithmen und parabolische  
 Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuchung

Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 3.

**FORTI.** Tafeln der hyperbolischen Functionen.

Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 1-12.

Für die Rechnung mit Hyperbelfunctionen konnte man sich an zwei Tafelwerke bedienen, desjenigen von Gronau und desjenigen von Forti: ältere Arbeiten dieser Art, wie wir sie von Schubert und Gudermann besitzen, hatten mehr eine theoretische, als eine praktische Bedeutung. Gronau legte den sogenannten ascendenten Winkel  $\tau$ , Forti den gemeinsamen Winkel  $\varphi$  zu Grunde. Letzterer erzählt uns, dass seine Anordnung von manchen sachkundigen Männern, so besonders von Houël und Bellavista, getadelt worden sei, dass er jedoch in seinen zu Rechnungszwecken bestimmten Tafeln trotzdem die ursprüngliche Idee als vorteilhafteste beibehalten habe. „Für den ausschliesslichen Gebrauch der Mathematiker“ aber gedenke er nunmehr neue Tafeln zu entwerfen, in welchen er sich den Wünschen seiner Mitbürger mehr anbequeme und den doppelten hyperbolischen Argumentator  $\omega$  zum Argumente nehme. Eine Probe dieses in der Ausarbeitung befindlichen Werkes wird mitgeteilt. Ausserdem sind in der Abhandlung zahlreiche geschichtliche Notizen, namentlich über Newton's Stellung zu den Hyperbelfunctionen, beigegeben.

Gr.

LINDEMANN. Ueber die Ludolph'sche Zahl. Berl. Ber. 1882, 679-682.

LINDEMANN. Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques.

C. R. CXV. 72-74.

LINDEMANN. Ueber die Zahl  $\pi$ . Klein Ann. XX. 213-225.

In seiner Abhandlung: Sur la fonction exponentielle (C. R. LXXVII., s. F. d. M. V. (1873.) p. 248) hat Herr Hermite die Möglichkeit einer Relation von der Form

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \dots + N_n e^{z_n} = 0$$

lesen, wo sowohl die  $z$  als die  $N$  als ganz vorausgesetzt

Monatsschr. d. Math. XIV. 1.





**HURWITZ.** Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen  $F(x) = \sum \left( \frac{D}{n} \right) \frac{1}{n^s}$ , die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. Schlömilch Z. XXVII. 86-102.

Durch Vergleichung der beiden von Herrn Schlömilch gegebenen Relationen

$$f(s) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^s \cdot \sin \left( \frac{s\pi}{2} \right) \cdot \Gamma(s) \cdot f(s),$$

$$f(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^s} + \cdots,$$

$$\varphi(1-s) = \frac{2^s-1}{2^{1-s}-1} \cdot \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \cos \left( \frac{1}{2} s\pi \right) \cdot \Gamma(s) \cdot \varphi(s),$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

ist der von Riemann („Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze“) betrachteten Function

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

in welche er u. A. die Gleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \left( \frac{s\pi}{2} \right) \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s)$$

herleitet, ist der Herr Verfasser zu allgemeinen, die obigen als specielle Fälle enthaltenden Sätzen, gelangt. Seine Untersuchungen betreffen die Dirichlet'sche Function  $F(s, D)$ , welche, wenn

$$D \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist, } = \frac{1}{1 - (-1)^{\frac{D^2-1}{8}} \cdot \frac{1}{2^s}} \cdot \sum \left( \frac{D}{n} \right) \cdot \frac{1}{n^s},$$

in allen übrigen Fällen  $= \sum \left( \frac{D}{n} \right) \cdot \frac{1}{n^s}$  gesetzt wird, wo die Summe sich auf alle  $n$  erstreckt, die positiv, ganzzahlig und relativ prim zu  $2D$  sind. Als Resultat der Untersuchung ergeben sich folgende Sätze:

I. „Die Functionen  $F(s, D)$  sind durchaus eindeutige Functionen der complexen Variabeln  $s$ .“ II. „Alle Functionen  $F(s, D)$  mit einziger Ausnahme von  $F(s, 1)$ , haben einen endlichen Wert des Arguments  $s$ .“ III. „Die Function  $F(s, 1)$  hat für jeden i Endlichen gelegenen Wert von  $s$  selbst einen endlichen Wert mit Ausnahme der Stelle  $s = 1$ , wo  $F(s, 1)$  so unendlich wird dass  $\lim [(s-1) F(s, 1)]_{s=1}$  ist.“ IV. „Die Functionen  $F(s, D)$  genügen folgenden einfachen Relationen:

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{\kappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{\kappa D} \cdot \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s, D),$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{\kappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wenn  $D$  positiv ist;

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{-\kappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{-\kappa D} \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s, D),$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{-\kappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2} + \frac{1}{2}\right)} \cdot F(s, D),$$

wenn  $D$  negativ ist. Dabei ist  $\kappa = 1$  für  $D \equiv 1 \pmod{4}$  und  $\kappa = 4$  in allen übrigen Fällen.“ M.

A. GENOCCHI. Sur les fonctions de M. Prym et de M. Hermite. Belg. Bull. (3) IV.

Die beiden Functionen von Herrn Hermite

$$P(x) = a^x \left( \frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2(x+2)} - \text{etc.} \right),$$

$$Q(x) = \int_a^x v^{x-1} e^{-v} dv,$$

welche in die von Herrn Prym für  $a = 1$  übergehen, sind schon

dem Falle, wo  $a$  reell ist, von Legendre (Fonctions elliptiques, p. 502) betrachtet worden. Mit Hülfe der Formel

$$P(x) = \frac{1}{\sin 2\pi x} \int_{-\pi}^{+\pi} t^x e^{-t} d\varphi, \quad t = ae^{2\varphi}\sqrt{-1}$$

lassen sich verschiedene andere interessante, aber ziemlich complicirte Darstellungsformen für jene Functionen geben. Wenn  $x$  eine ganze Zahl ist, so nimmt man für  $P(x)$  die Definition  $P(x + \varepsilon)_{\varepsilon=0}$ . Mn. (M.)

BERGER. En generalisation af några formler i Gammafunktionens teori. Stockh. Öfv. 1881. 13-30.

Wenn die Function  $f(x)$  für  $x > 0$  endlich und continuirlich ist, wenn ferner

$$\int_0^\infty f'(x) = \int_0^\infty f''(x) = \dots = 0$$

, und für  $x > -1$

$$F(x+1) - F(x) = f(x)$$

gesetzt wird, so findet der Verfasser, dass

$$F(x+1) = \int_1^x f(z) dz + \frac{f(x)}{2} + K_0 - \sum_{k=1}^{h=x} \left[ \frac{f(k+x-1) + f(k+x)}{2} - \int_k^{k+1} f(x-1+z) dz \right],$$

oder

$$K_0 = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{h=x} \left[ \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(z) dz \right].$$

Diese Formel combinirt der Verfasser nur mit der Euler'schen Summenformel, und findet dadurch eine Reihe von Formeln, aus welchen für den speciellen Fall

$$f(x) = \log(x)$$

bekannte Gamma-Formeln erhalten werden. So wird z. B. die Gleichung

$$\Gamma(1+x) \cdot \Gamma(1-x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - x^2} = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$



**APPELL.** Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. Résal J. (3) VIII. 173-217.

Der Herr Verfasser hat für die Gauss'sche hypergeometrische Reihe eine Verallgemeinerung gefunden, welche die wesentlichen Eigenschaften jener Reihe beibehält; dieselbe besteht in der Einbringung der vier Functionen:

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) = \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,$$

wo  $(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+k-1)$ ,  $(\lambda, 0) = 1$ , und die Summation über  $m$  und  $n$  von Null bis Unendlich zu erstrecken ist. Die vorliegende Arbeit ist einer zusammenhängenden und ausführlichen Darstellung der Untersuchungen über diese Functionen gewidmet, deren hauptsächlichsten Resultate der Verfasser in den C. R. von 1880 t. XC. p. 296-299, 731-735, 977-980, t. XCI. p. 304-366 mittheilt hat; es sei daher auf die Referate in diesem Jahrbuche (1880) XII. p. 296f., sowie auf die zweite Auflage von Heine's Landbuch der Kugelfunctionen Bd. II. Zusätze p. 359f. verwiesen.  
T.

## B. Elliptische Functionen.

**C. FORMENTI.** Riduzione di integrali di funzioni algebriche ad integrali di funzioni razionali. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 165-173.

Der Herr Verfasser nennt Periode einer Function  $\psi(z)$  eine Function  $\lambda(z)$ , die der Functionalgleichung

$$\psi(\lambda) = \psi(z)$$

genügt, und beweist den Satz, dass wenn  $\lambda(z)$  eine Periode der

rationalen Function  $\psi(z)$  ist, und die rationale Function  $P(z)$  Bedingung

$$P(\lambda)d\lambda = P(z)dz$$

genügt, das algebraische Differential

$$\frac{P(z)dz}{\alpha[\varphi_{-1}\psi(z)]},$$

wo  $\alpha(z), \varphi(z)$  rationale Functionen sind und  $\varphi_{-1} = \frac{1}{\varphi}$ , mittels der Substitution  $\psi(z) = \varphi(y)$  in das rationale Differenzial

$$\frac{F(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y)dy}{\alpha(y)}$$

transformiren lässt. Als Beispiel dient

$$\psi(z) = \frac{A(z-a)^m - B(z-b)^m}{C(z-a)^m - D(z-b)^m}.$$

Von diesem Theorem wird eine Anwendung gemacht auf Reduction specieller elliptischer Integrale auf Integrale rationaler Functionen. M.

G. A. STUART. Reduction of integrals of the form

$$\int \frac{z^{n-1} dz}{(z^n - c^n) \sqrt{z^n - b^n}}.$$

Quart. J. XVIII. 245-260.

Die Reduction des obigen Integrals, die für  $n = 3$ , Quart. J. XVIII. 66, durchgeführt ist, beruht auf folgendem Theorem. Ist

$$\frac{dz}{f(z^n)} = dx, \quad z = \varphi(x), \quad \omega z = \varphi(y), \quad \omega^n = 1,$$

dann ist

$$\frac{\omega dz}{f(z^n)} = dy,$$

oder

$$dy = \omega dx,$$

und

$$y = \omega x + C,$$

lich:

$$\frac{z^{m-1} dx}{(z^n - c^n) f(z^n)} = \frac{1}{nc^{n-m}} \sum \int \frac{\omega^m dx}{z - \omega c} = \frac{1}{nc^{n-m}} \sum \int \frac{\omega^m dx}{\varphi(x) - \varphi(\omega a + C)}.$$

nn  $f(z^n) = \sqrt{z^n \pm b^n}$  oder  $= \sqrt{b^n - z^n}$ , so kann  $\varphi(x)$  für  $n = 3, 4$  r 6 durch elliptische Functionen ausgedrückt werden. Ein- end wird der Fall  $n = 4$  behandelt. Schliesslich wird gezeigt, is für  $n = 8$  die Integrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^8 \pm b^8}} \text{ und } \int \frac{dz}{\sqrt{b^8 - z^8}}$$

b auf eine Summe zweier elliptischen Integrale zurückführen en, dass aber  $\varphi(x)$  nicht durch elliptische Functionen von  $x$  sgedrückt werden kann. M.

GÜNTHER. Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques. S. M. F. Bull. X. 88-97.

Als pseudoelliptische Integrale bezeichnete Malet Integrale n der Form

$$\int f[x, R(x)] dx,$$

o  $f$  irgend eine algebraische Function und  $R(x)$  die Quadrat- urzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades. Diese ssen sich nicht auf die Legendre'schen Normalformen bringen, ch gelingt es bisweilen, sie in endlicher Form zu integrieren. it solchen Integralen hat sich bereits Legendre beschäftigt (traité des fonctions ell. Paris 1827. t. I. p. 136), später Clausen (str. Nachr. Nr. 442, Grunert Arch. III. 335) und Malet (Brioschi m. (2) VI. 252, s. F. d. M. VII. (1875) 147). Herr Günther be- hältigt sich mit dem Integrale

$$\int \frac{x dx}{(x^3 + 8) \sqrt{x^3 - 1}},$$

elches Clausen

$$= \frac{1}{18} \operatorname{arctg} \frac{3x(x-1)}{(4-x) \sqrt{x^3-1}} + \frac{1}{12\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$





**STOLP.** De elliptische integralen van der eerste soort. Leiden.

Die Dissertation behandelt die elliptischen Integrale der ersten Art. Der Verfasser kann namentlich die künstliche Weise nicht billigen, auf welche gewöhnlich die Substitution in's Werk gesetzt wird, um die biquadratische Form auf die bekannte Form  $(1-z^2)(1-k^2z^2)$  zurückzuführen. Im ersten Abschnitt behandelt er die Transformation des Ausdruckes  $Ax^2+Bx+C$  in  $(x-a_1)(x-a_2)$  und das übereinstimmende Integral

$$\int \frac{dx}{A(x-a_1)(x-a_2)}.$$

Im zweiten Abschnitt gelangt er zu den Ausdrücken vom dritten und vierten Grad und untersucht die Folgerungen, welche alle Substitutionen von der Form  $\frac{\alpha_1+\beta_1y}{\alpha_2+\beta_2y}$  ergeben. Bei dem Ausdruck

des dritten Grad werden sechs brauchbare Formen der Substitution erhalten, welche in einer Tafel zusammengesetzt werden. Bei dem Ausdruck vom vierten Grad giebt es acht, die in einer zweiten Tafel zusammengesetzt werden, welche als besondere die erste enthält. Darauf werden ebenso andere Substitu-

tionen untersucht, so die von der Form  $\sqrt{\frac{\gamma_1+\delta_1z}{\gamma_2+\delta_2z}}$ , welche zur

Leitung des Integrals  $\int \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos\theta+\mu^2x^4}}$  dienen

kann, wie Enneper bereits gezeigt hat; weiter die Substitutionen

von der Form  $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}=y^2$ , welche bereits Lagrange und Legendre

angeführt haben. Sodann wendet sich der Verfasser zu den Transformationen von Gauss und Landen, welche sich an das vorige sofort anschliessen, und behandelt das Additionstheorem für elliptische Integrale der ersten Art. Nun folgt die transcendente Substitution  $x=\sin^2\varphi$  und  $x=\tanh^2\varphi$ , wobei für den gewöhnlichen Sinus auch der hyperbolische genommen wird. Im letzten Abschnitt werden einige Methoden, wonach die hier behandelten elliptischen Integrale in Reihen entwickelt werden



an bei der Untersuchung des logarithmischen Potentials einer  
 einseitig-dreieckigen Platte gestossen. M.

SCHLÖMILCH. Notiz über gewisse elliptische Integrale.  
 Schlömilch Z. XXVII. 62-64.

Genügen die beiden Functionen  $F(x)$  und  $f(x)$  den Be-  
 dingungen

$$F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \text{const.}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

erhält man die Reduction

$$\int_0^x F(x) \cdot f(x) \frac{dx}{x} = \text{const.} \int_0^1 f(x) \frac{dx}{x}.$$

Wendet man dies auf die elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$F(x) = F\left(\kappa, \arctan \frac{x}{\sqrt{\kappa'}}\right),$$

$$F(x) = E\left(\kappa, \arctan \frac{x}{\sqrt{\kappa'}}\right) - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2 x}{\sqrt{(1 + \kappa' x^2)(\kappa' + x^2)}}$$

angewendet, ergibt die merkwürdigen Relationen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\kappa, \varphi) f(\sqrt{\kappa'} \tan \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi = F'(\kappa) \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$$

und

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{E(\kappa, \varphi) f(\sqrt{\kappa'} \tan \varphi)}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^1 \left\{ E'(\kappa) + \frac{\kappa^2 x}{\sqrt{(1 + \kappa' x^2)(\kappa' + x^2)}} \right\} \frac{f(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

M.

THOMAE. Ueber elliptische Integrale zweiter Gattung.  
 Schlömilch Z. XVII. 179-180.

Für die elliptischen Integrale zweiter Gattung wird eine  
 Entwicklung von folgender Form gegeben:



GOURSAT. Sur l'équation linéaire qui relie au module  
fonction complète de première espèce. S. M. F. Bull.  
44-51.

Wie Herr Picard (C. R. 28 avril 1879, s. F. d. M. XI. 286)  
hat, kann jede mehrdeutige Function der complexen  
Variablen  $x$ , welche in der ganzen Ebene und auf der ganzen  
nur drei singuläre Punkte  $(0, 1, \infty)$  hat, als eindeutige  
Function des Quotienten  $\omega = \frac{iK'}{K}$  angesehen werden, wo  $K$   
für beliebige Werte von  $x$  durch die lineare Differential-  
gleichung zweiter Ordnung (s. Fuchs, Borchardt J. LXXI. 91,  
J. M. II. (1870) p. 248)

$$x(1-x) \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-2x) \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4} y = 0$$

bestimmt werden. Die so definirte Function  $\omega$  der Variablen  $x$   
in der ganzen Ebene nur drei kritische Punkte  $(0, 1, \infty)$  und  
besitzt folgende Eigenschaften. Der Coefficient von  $i$  in  $\omega$  ist  
für jedes  $x$  positiv; ferner, wenn man von einem Punkte  $A$  der  
Ebene mit einem Anfangswerte  $\omega_0$  ausgeht und die Variable  $x$   
einen geschlossenen Weg beschreiben lässt, der nicht durch  
die Punkte 0 oder 1 geht, so kommt man zum Ausgangs-  
werte mit einem Werte  $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$  zurück, wo  $a, b, c, d$  vier  
Zahlen, der Bedingung  $ad - bc = 1$  genügende Zahlen sind.  
Betrachtet man sich auf diese Eigenschaften, so ist es leicht zu  
sehen, dass, wenn der von  $x$  durchlaufene Weg die Punkte 0  
oder 1 überschreitet, man niemals zum Anfangswert zurück-  
kehrt. Es ergibt sich, dass nur ein einziger Weg für die  
Variable  $x$  existirt, der von  $\omega_0$  zu  $\frac{a\omega_0 + b}{c\omega_0 + d}$  führt, wenn man  
diese Wege als identisch ansieht, die ohne Ueberschreitung der  
Punkte 0 und 1 ineinander übergeführt werden können. Diese  
Eigenschaft wird hier von Herrn Goursat bewiesen, indem er  
allein die Veränderungen der Integrale der obigen Diffe-  
rentialgleichung in der Umgebung eines der kritischen Punkte  
untersucht.

A. CAYLEY. Note on Landen's theorem. Lond., M. S., Pt XIII. 47-48.

Landen hat sein Theorem, welches einen Hyperbelbogen durch zwei Ellipsenbogen darstellt, (Phil. Trans. LXV. (177 283-289) in folgender Form erhalten:

$$\int \sqrt{\frac{m^2 + gx^2}{m^2 - x^2}} dx = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{(m-n)^2 - t^2}{(m+n)^2 - t^2}} + \frac{1}{4} \int \sqrt{\frac{(m+n)^2 - t^2}{(m-n)^2 - t^2}} \right\}$$

wo

$$t = gx \sqrt{\frac{m^2 - x^2}{m^2 - gx^2}} \quad \text{und} \quad g = \frac{m^2 - n^2}{n^2}.$$

Hier wird diese Form mit der der gewöhnlichen Transformation

$$\frac{(1-k')dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot 1-k^2x^2} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2} \cdot 1-\lambda^2y^2}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'},$$

$$y = (1+k')x \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}$$

identificirt.

M.

J. GRIFFITHS. Note on Professor Cayley's paper.

Lond., M. S., Proc. XIII. 49-51.

Mit Bezug auf die vorstehende Note teilt Herr Griffith folgende Transformation mit. Wenn

$$\sqrt{1-e^2x^2} + e\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+e)^2 - \frac{4ey^2}{(1+e)^2}},$$

so ist:

$$\left\{ \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} + e^2 \sqrt{\frac{1-x^2}{1-e^2x^2}} + 2e \right\} dx = \sqrt{\frac{(1+e)^2 - \frac{4ey^2}{(1+e)^2}}{(1+e)^2 - y^2}}$$

M.

J. GRIFFITHS. Elementary analytical proof of Gra and MacCullagh's theorems, with an extension of former. Lond., M. S., Proc. XXXI. 177-179.

Es wird bewiesen, dass, wenn

$$t^2 = (a \sin \vartheta - a' \sin \vartheta')^2 + (b \cos \vartheta - b' \cos \vartheta')^2,$$

ein

$$\frac{a}{a'} \sin \vartheta \sin \vartheta' + \frac{b}{b'} \cos \vartheta \cos \vartheta' = 1, \quad a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$

an

$$d\vartheta = \sqrt{a'^2 \cos^2 \vartheta + b'^2 \sin^2 \vartheta} \cdot d\vartheta - \sqrt{a'^2 \cos^2 \vartheta' + b'^2 \sin^2 \vartheta'} \cdot d\vartheta'$$

und dass die Identität besteht:

$$\begin{aligned} & (aa' \cos \vartheta \cos \vartheta' + bb' \sin \vartheta \sin \vartheta')^2 \\ &= (a'^2 \cos^2 \vartheta + b'^2 \sin^2 \vartheta) (a'^2 \cos^2 \vartheta' + b'^2 \sin^2 \vartheta'). \end{aligned}$$

Nach die geometrische Deutung der ersten Relation ergibt sich

die Erweiterung von Grave's Satz. Schliesslich wird gezeigt, dass hier entspringende Additionstheorem für die elliptischen Integrale zweiter Gattung in die gebräuchliche Form übergeführt werden kann. M.

A. MACMAHON. Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret. C. R. XCV. 831-832.

Bezieht sich auf eine Arbeit, die im ersten Bande des Jahrbuchs (1868) p. 136-137 besprochen worden ist. Herr Allégret hat das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{(A + 3Bx + 3Cx^2 + Dx^3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{(A + 3By + 3Cy^2 + Dy^3)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

in irrationaler Form dargestellt. Herrn Mac Mahon ist es gelungen, dem Integral eine rationale Form zu geben. O.

A. MACMAHON. Integration of an equation connected with elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1882.

Die hier betrachtete Gleichung

$$\frac{dx}{X^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{Y^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

)

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \quad Y = A + By + Cy^2 + Dy^3.$$

wurde von Allégret (C. R. LXVI. 1144) integrirt. Es ergab das Resultat

$$A \left( \frac{yx^{\frac{1}{3}} - xy^{\frac{1}{3}}}{x - y} \right)^3 + \alpha xy \left[ D - \left( \frac{x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}}{xy} \right) \right]^3 = 0,$$

wo  $\alpha$  eine willkürliche Constante ist. Die vorliegende zeigt, wie man das Resultat in rationaler Form erhalten kann. Csy. (M).

A. G. GREENHILL. Note on Professor Cayley's paper on elliptic function solution of the equation  $x^3 + y^3 - 1 = 0$ . Cambr. Proc. IV. 223-228.

Die Arbeit des Herrn Cayley erschien in Proc. of Cambr. 106-109 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 366). Herr Greenhill zeigt, dass, wenn  $k = \sin 15^\circ$  gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{(1 + \operatorname{cn} u)^2} = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{(1 + \operatorname{cn} a)^2}$$

gibt:  $\operatorname{cn} u = \operatorname{cn} a$ , oder  $\operatorname{cn} \omega a$ , oder  $\operatorname{cn} \omega^2 a$ , wo  $\omega$  eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist. Er erwähnt ferner, dass Herr Mahon gezeigt habe, dass das Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{(A + 3Bx + 3Cx^2 + Dx^3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{(A + 3By + 3Cy^2 + Dy^3)^{\frac{2}{3}}} =$$

sei:

$$\frac{(A + B(x + y + z) + C(yz + zx + xy) + Dxyz)^{\frac{2}{3}}}{(A + 3Bx + 3Cx^2 + Dx^3)^{\frac{2}{3}} (A + 3By + 3Cy^2 + Dy^3)^{\frac{2}{3}} (A + 3Bz + 3Cz^2 + Dz^3)^{\frac{2}{3}}} =$$

wo  $z$  eine willkürliche Constante ist, und giebt eine Folge von Gleichungen. Glr. (M.).

J. W. L. GLAISHER. Proof of the addition equation for elliptic integrals of the second kind by means of  $q$ -series. Mess. (2) XII. 43-48.

Es wird ein algebraischer Beweis für das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung

$$Z(u) + Z(v) - Z(u + v) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u + v)$$



eben, indem für  $\operatorname{sn} u$  und  $Z(u)$  die  $q$ -Reihen genommen werden, nämlich:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\pi}{2kK} \left\{ \frac{4q^{\frac{1}{2}}}{1-q} \sin x + \frac{4q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3} \sin 3x + \frac{4q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5} \sin 5x + \dots \right\},$$

$$Z(u) = \frac{\pi}{2K} \left\{ \frac{4q}{1-q^2} \sin 2x + \frac{4q^3}{1-q^4} \sin 4x + \frac{4q^5}{1-q^6} \sin 6x + \dots \right\},$$

$$u = \frac{Kx}{\pi} \text{ ist.} \quad \text{Glr. (M.).}$$

CH. Erklärung. Schlömilch Z. XXVII. 192.

Anerkennung der Priorität Schröter's betreffs des im vorigen Heft d. Zeitschrift p. 333 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 354.) ausgesprochenen Satzes. O.

STOLZ. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Münchener Ber. XII. 14-16.

Durch Betrachtung der Doppelreihe

$$\sum_n \sum_{n'} \frac{2}{(n \cdot 2\omega + n' \cdot 2\omega' - u)^3} \quad \left( \begin{array}{l} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right)$$

weist Herr Stolz, dass die mit den Werten

$$g_2 = 60 \sum' (n \cdot 2\omega + n' \cdot 2\omega')^{-4}$$

$$g_3 = 140 \sum' (n \cdot 2\omega + n' \cdot 2\omega')^{-6}$$

gebildete Weierstrass'sche Function  $\wp(u, g_2, g_3)$  die Differentialgleichung

$$\left( \frac{dx}{du} \right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

erfüllt, und zeigt durch Entwicklung der Function  $\wp'(u, g_2, g_3)$

in Partialbrüche nach Cauchy's Methode, wie man ungezwungen

in der  $\wp(u, g_2, g_3)$ , worin  $g_2, g_3$  als gegeben anzusehen sind, zur vorigen Doppelreihe gelangt. M.

WEIERSTRASS. Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Berl. Ber. 1882. 443-451.

Der Herr Verfasser entwickelt zunächst eine Reihe von Relationen zwischen den Functionen

$$\sigma(u|\omega, \omega'), \sigma_1(u|\omega, \omega'), \sigma_2(u|\omega, \omega'), \sigma_3(u|\omega, \omega')$$

und deren partiellen Ableitungen nach  $u, \omega, \omega'$ . Aus dies folgt, dass jede partielle Ableitung der Function  $\sigma$  nach  $\omega$  und  $\omega'$  dargestellt werden kann in der Form:

$$F_0 \sigma + F_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u} + F_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} + \dots,$$

wo  $F_0, F_1, F_2, \dots$  ganze Functionen von  $\omega, \omega', \eta, \eta', g_2, g_3$  sind; ferner, dass jede partielle Ableitung von  $\sigma_1$  nach  $\omega, \omega'$  in der Form

$$F_0^{(\lambda)} \sigma + F_1^{(\lambda)} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} + F_2^{(\lambda)} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2} + \dots$$

darstellen lässt, wo  $F_0^{(\lambda)}, F_1^{(\lambda)}, F_2^{(\lambda)}, \dots$  ganze Functionen von  $\omega, \omega', \eta, \eta', \varepsilon_\lambda, e_\lambda, u$  sind; drittens, dass jede partielle Ableitung von  $\sigma$  nach  $g_2, g_3$  die Form

$$G_0 \sigma + G_1 \frac{\partial \sigma}{\partial u} + G_2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u^2} + \dots$$

hat, wo jedes  $G$  eine ganze Function von  $g_2, g_3, u$ , dividirt durch eine Potenz von  $g_2^3 - 27g_3^2$  ist; und endlich, dass jede partielle Ableitung von  $\sigma_1$  nach  $e_\lambda, \varepsilon_\lambda$  ein Ausdruck von der Form

$$G_0^{(\lambda)} \sigma + G_1^{(\lambda)} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} + G_2^{(\lambda)} \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u^2} + \dots$$

ist, wo die  $G^{(\lambda)}$  ganze Functionen von  $u, e_\lambda, \varepsilon_\lambda$ , dividirt durch eine Potenz von  $(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)$  sind.

Die gewonnenen Differentialgleichungen werden im zweiten Abschnitte auf die Entwicklung der Functionen  $\sigma, \sigma_1$  nach Potenzen von  $u$  angewendet. M.

G. FROBENIUS und L. STICKELBERGER. Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten. Kronecker J. XCII. 311-327.

Die elliptischen Functionen werden hier als Functionen von drei Variabeln  $u, \omega, \omega'$  oder  $u, g_2, g_3$  aufgefasst, indem die Per

$2\omega, 2\omega'$  als unabhängige Veränderliche angesehen werden, die der Beschränkung unterliegen, dass sie weder unendlich gross, noch unendlich klein werden dürfen und dass ihr Verhältniss nicht reelle Werte hindurchgehen darf. Die Herren Verfasser bedienen sich durchweg der von Herrn Weierstrass eingeführten Bezeichnung. Es werden die partiellen Differentialgleichungen, denen eine elliptische Function, als Function dreier Variablen betrachtet, genügt, aufgestellt, und zu dem Zweck jene Function nächst als Function von  $u, \omega, \omega'$  aufgefasst, hernach aber eine Transformation der erhaltenen Differentialgleichungen durch Einsetzung der Variablen  $g_2, g_3$  für  $\omega, \omega'$  vorgenommen. M.

**FROBENIUS.** Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art. Kronecker J. XCIII 53-68.

Unter einer elliptischen Function zweiter Art versteht man, nach Hermite (C. R. LXXXV.), jede Function, welche im Endlichen überall den Charakter einer rationalen hat, und deren arithmische Ableitung doppelt-periodisch ist. Im Vorliegenden wird die Theorie dieser Functionen auf die der Functionen erster Art zurückgeführt mit Hülfe der Function

$$q(u) = \frac{\sigma(2\mu\omega + 2\mu'\omega' - u)}{\sigma(2\mu\omega + 2\mu'\omega') \cdot \sigma(u)} e^{(2\mu\eta + 2\mu'\eta')u}.$$

Der Herr Verfasser beweist folgende allgemeinen Eigenschaften dieser Functionen: I. „Eine elliptische Function zweiter Art, die keinen Wert unendlich gross wird, verschwindet identisch.“ II. „Eine solche Function wird für ebenso viele incongruente Werte Null wie unendlich.“ III. „Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die incongruenten Werte, für die eine elliptische Function zweiter Art verschwindet, und  $b_1, b_2, \dots, b_n$  die Werte, für die sie unendlich wird, so ist

$$\sum a - \sum b \equiv 2\mu\omega + 2\mu'\omega'.$$

Die folgenden Paragraphen behandeln die Addition und Multiplication, die Multiplication und Division, und die Transformation dieser Functionen. M.



$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Im Falle, wo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

gilt, lassen sich folgende fünf Formeln:

$$\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = k'^2 + k^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s,$$

$$\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s - \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v = k'^2 (\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s),$$

$$k^2 \operatorname{sn}(u+v) (\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s) = Zu + Zv + Zr + Zs,$$

$$\operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{cn} s \operatorname{dn} s - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{cn} s \operatorname{cn} s + \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{sn} s \operatorname{dn} s \\ = k^2 \operatorname{sn}(r+s) (\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s),$$

$$k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{dn} s \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{sn} s \\ = \operatorname{sn} s \operatorname{dn} s + k^2 \operatorname{cn} s \operatorname{sn}(r+s) (\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v - \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s),$$

und  $u+v+r+s=0$ . Die beiden ersten Formeln sind bereits von den Herren Cayley u. H. J. S. Smith (Lond. M. S. Proc. X. Bd 97., s. F. d. M. XI. (1879) 287. 314.) gegeben worden. Auch werden einfache Ausdrücke für die Function

$$F = \frac{1}{k} \Pi \operatorname{dn} x \cdot \sum \frac{1}{\operatorname{dn} x} \cdot \frac{d \operatorname{am} x}{dk},$$

gegeben, wenn  $\sum x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$  ist, mitgeteilt. M.

DE BRUNO. Sur une nouvelle série dans les fonctions elliptiques. C. R. XCV. 22-23.

Die sich durch ausserordentliche Convergenz auszeichnende Reihe lautet:

$$\frac{1}{\pi} \left( 1 + \sqrt[4]{k'} + \sqrt[4]{1+k'} \sqrt[8]{64k'} \right) = 1 + 2(q^{16} + q^{64} + q^{144} + \dots + q^{(4p)^2} \dots).$$

die Herstellung von elliptischen Tafeln auf 20 Decimalen erleichtert, bereits die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{\pi}}} \left( 1 + \sqrt[4]{k'} + \sqrt[4]{1+k'} \sqrt[8]{64k'} \right)$$

gen.

M.

J. W. L. GLAISHER. On a theorem in elliptic function  
Brit. Ass. Rep. 1882.

Ein neuer Beweis des von Jacobi (Fundamenta Nov.  
p. 125-127) bewiesenen Satzes: „Wenn

$$\frac{u^n}{n!} = \frac{\operatorname{sn}^n u}{n!} + R_n^{(n+2)} \frac{\operatorname{sn}^{n+2} u}{(n+2)!} + R_n^{(n+4)} \frac{\operatorname{sn}^{n+4} u}{(n+4)!} + \dots,$$

so genügen die  $R$  folgenden Gleichungen:

$$(2n-2)! k^{2n-1} \operatorname{sn}^{2n-1} u = R_1^{(2n-1)} k \operatorname{sn} u + R_3^{(2n-1)} \frac{d^2}{du^2} k \operatorname{sn} u + \\ + R_{2n-1}^{(2n-1)} \frac{d^{(2n-2)}}{du^{2n-2}} k \operatorname{sn} u,$$

$$(2n-1)! k^{2n} \operatorname{sn}^{2n} u = -R_0^{(2n)} + R_2^{(2n)} k^2 \operatorname{sn}^2 u + R_4^{(2n)} \frac{d^2}{du^2} k^2 \operatorname{sn}^2 u + \\ + R_{2n}^{(2n)} \frac{d^{(2n-2)}}{du^{(2n-2)}} k^2 \operatorname{sn}^2 u,$$

worin  $R_0^{(2n)}$  von  $u$  unabhängig ist.“

Csy. (M.).

J. J. WALKER. Proof of the addition theorem for elliptic  
integrals of the second kind, and of Fagnano's theorem  
Lond., S. M. Proc. XIII. 172-174.

Bekanntlich werden die Beweise der Additionstheoreme  
die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung, analog  
Lagrange'schen Beweise für die erste Gattung, mit Hilfe  
Eigenschaften des sphärischen Dreiecks gegeben (s. Graßmann  
Borchardt J. XC. 83, F. d. M. XII. (1880) 353.). Herr Walker  
geht, um das Additionstheorem für die zweite Gattung her-  
zuleiten, von der Ellipse und deren Tangenten aus und betrachtet  
den Ueberschuss der Summe zweier von einem Punkte aus  
gezogenen Tangenten über den dazwischen liegenden Bogen.  
Ein besonderer Fall führt dann auf einen einfachen und unabhän-  
gigen Beweis des Satzes von Fagnano. M.

**NOVARESE.** Intorno ad alcune formole di Hermite per l'addizione delle funzioni ellittiche. Torino, Atti. XVII. 607-625.

**NOVARESE.** Intorno alla moltiplicazione delle funzioni ellittiche. Torino, Atti XVII. 723-739.

Für die Additionstheoreme der drei elliptischen Functionen  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  hat Herr Hermite in einer „Note sur la théorie des fonctions elliptiques“, welche der sechsten Auflage von Lacroix' *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* T. II. p. 432 beigelegt ist, folgende Form gegeben:

$$sn(u_1 + u_2 + \dots + u_{2n-1}) = \frac{+L}{sn u_1 sn u_2 \dots sn u_{2n-1}},$$

und ähnlich für  $cn$  und  $dn$ . Die Constanten  $L$  etc. sind folgenmassen bestimmt. Wenn  $z$  eine der drei Functionen  $sn$ ,  $cn$ ,  $dn$  darstellt, und die Function

$$\varphi(u) = F(z^2) + \frac{dz}{du} z F_1(z^2)$$

betrachtet wird, wo  $F$  und  $F_1$  ganze rationale Functionen vom Grade  $n$  und  $n-2$  sind, so ergeben sich die  $2n-1$  auftretenden Constanten aus der Gleichung

$$\varphi(u_v) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, 2n-1),$$

und das von  $z$  unabhängige Glied des Polynoms  $F$  giebt die Zahlen  $L$  etc. Diese Formel von Hermite wird nun in der ersten Note entwickelt, indem die Ausdrücke für

$$sn(u_1 + u_2 + \dots + u_m), \quad cn(u_1 + u_2 + \dots + u_m) \text{ etc.,}$$

wo  $m$  irgend eine ganze Zahl ist, als Quotienten zweier Determinanten von der Ordnung  $m$  mit unzweideutigem Vorzeichen dargestellt werden. Da diese Darstellungen für  $u_1 = u_2 = \dots u_m = u$  zwei Glieder übergehen, deren erstes  $sn(mu)$  etc., aber

deren zweites die unbestimmte Form  $\frac{()}{()}$  annimmt, so wird in der

zweiten Note diese Unbestimmtheit dadurch vermieden, dass dem Multiplicationstheorem eine andere Form gegeben wird, die es sich als besonderen Fall des Additionstheorems erscheinen lässt.

Erreicht wird diese Umformung mit Hülfe eines Theorems Herrn Siacci, nämlich: „Für

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x$$

reducirt sich der Quotient

$$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x_0) \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})}{\Sigma \pm \psi_0(x_0) \psi_1(x_1) \dots \psi_{n-1}(x_{n-1})}$$

auf

$$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x) \varphi_1'(x) \dots \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)}{\Sigma \pm \psi_0(x) \psi_1'(x) \dots \psi_{n-1}^{(n-1)}(x)}.$$

M.

J. W. L. GLAISHER. On certain formulae in elliptic functions. Quart. J. XIX. 22-38.

Die ähnliche Gestalt der Formeln

$$\operatorname{tg}(A - B) = \frac{\operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$$

und

$$\operatorname{sn}(\alpha - \beta) \cdot \operatorname{sn}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \cdot \operatorname{sn}^2 \beta}$$

führt darauf,  $\operatorname{tg}(A - B)$ ,  $\operatorname{tg}(A - C)$ ,  $\operatorname{tg}(B - C)$  etc. zu erhalten durch:

$$ik \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta), ik \operatorname{sn}(\alpha - \gamma) \operatorname{sn}(\alpha + \gamma), ik \operatorname{sn}(\beta - \gamma) \operatorname{sn}(\beta + \gamma)$$

Auf diesem Wege gelangt Herr Glaisher zu einer Reihe von Formeln für die elliptischen Functionen, welche der von Jacobi (Crelle XV. und Werke I. 335-341) gegebenen

$$\operatorname{sn}(w - x) \operatorname{sn}(y - z) + \operatorname{sn}(w - y) \operatorname{sn}(z - x) + \operatorname{sn}(w - z) \operatorname{sn}(x - y) + k^2 \operatorname{sn}(w - x) \operatorname{sn}(w - y) \operatorname{sn}(w - z) \operatorname{sn}(y - z) \operatorname{sn}(z - x) \operatorname{sn}(x - y)$$

analog sind. Am Schluss wird gezeigt, dass man jede Relation, welche nur  $\operatorname{sn}$  am enthält, in eine trigonometrische verwandeln kann, indem man entweder  $k = 0$  oder  $k = 1$  setzt. Vgl. Messenger X. 26 und Proc. of Cambr. Phil. Soc. III. 308, (F. d. M. XII. (1880) p. 429.).

M.



L. GLAISHER. On a method of deriving formulae elliptic functions. Cambr. Proc. IV. 186-188.

Die Methode besteht in Folgendem: Wird  $\operatorname{sn} u$ , wenn der Modul 1 ist, mit  $\operatorname{sn}_1 u$  bezeichnet, so ist

$$\operatorname{sn}_1(u-v) = \frac{\operatorname{sn}_1 u - \operatorname{sn}_1 v}{1 - \operatorname{sn}_1 u \cdot \operatorname{sn}_1 v},$$

wenn der Modul  $= k$  ist,

$$k \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta) = \frac{k \operatorname{sn}^2 \alpha - k \operatorname{sn}^2 \beta}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \operatorname{sn}^2 \beta}.$$

Wir also

$$\operatorname{sn}_1 u = k \operatorname{sn}^2 \alpha, \operatorname{sn}_1 v = k \operatorname{sn}^2 \beta,$$

verwandeln wir  $\operatorname{sn}_1(u-v)$  in  $k \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \operatorname{sn}(\alpha + \beta)$ . Wenn wir irgend welche Formeln haben, die die  $\operatorname{sn}$  der Differenzen der Argumente enthalten, und wir setzen  $k = 1$ , so können wir in jeder Differenz durch das  $k$ -fache Product der  $\operatorname{sn}$  der Argumente und Differenzen der Argumente ersetzen, z. B.

$$\operatorname{sn}_1(u-v) \text{ durch } k \operatorname{sn}(u-v) \operatorname{sn}(u+v),$$

$$\operatorname{sn}_1(u-w) \text{ „ } k \operatorname{sn}(u-w) \operatorname{sn}(u+w) \text{ etc.,}$$

Wir erhalten eine neue Formel, die für den Modul  $k$  richtig ist. Glr. (M.).

J. U. WILKINSON. Some elliptic function formulae. Lond., M. S. Proc. XIII. 106-109.

Es wird eine Reihe von Formeln entwickelt, die aus dem Additionstheorem fließen: zuerst solche, die der Formel

$$\operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta \operatorname{sn}(\alpha - \beta) + \operatorname{sn} \beta \operatorname{sn} \gamma \operatorname{sn}(\beta - \gamma) + \operatorname{sn} \gamma \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn}(\gamma - \alpha) \\ = - \operatorname{sn}(\alpha - \beta) \operatorname{sn}(\beta - \gamma) \operatorname{sn}(\gamma - \alpha)$$

abgeleitet sind, z. B.

$$\operatorname{cn} \alpha \frac{\operatorname{sn}(\beta - \gamma)}{\operatorname{cn}(\beta - \gamma)} + \operatorname{cn} \beta \frac{\operatorname{sn}(\gamma - \alpha)}{\operatorname{cn}(\gamma - \alpha)} + \operatorname{cn} \gamma \frac{\operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{cn}(\alpha - \beta)} \\ = k^2 \operatorname{cn} \alpha \operatorname{cn} \beta \operatorname{cn} \gamma \frac{\operatorname{sn}(\beta - \gamma) \operatorname{sn}(\gamma - \alpha) \operatorname{sn}(\alpha - \beta)}{\operatorname{dn}(\beta - \gamma) \operatorname{dn}(\gamma - \alpha) \operatorname{dn}(\alpha - \beta)},$$

und die Darstellungen von

$$\operatorname{sn}(\alpha + \beta + \gamma), \operatorname{cn}(\alpha + \beta + \gamma), \operatorname{dn}(\alpha + \beta + \gamma).$$

M.



otienten aus dem Sinus eines Winkels und dem Sinus  
genseite gleich dem Modul  $k$  setzt, ergeben sich zwölf  
ngen zwischen den Stücken des sphärischen Dreiecks, aus  
eder eine besondere Form des Additionstheorems ent-  
Diese Formen werden schematisch zusammengestellt.

M.

USENBERGER. Notiz zur Theorie der Modulfunc-  
en. Klein Ann. XX. 45-46.

wird gezeigt, dass zwischen den Reihen, die Herr Hurwitz  
llagen einer independenten Theorie der elliptischen Modul-  
ien~, Clebsch Ann. 528., s. F. d. M. XIII. (1881) 364) der  
ctionen der Modulfunctionen zu Grunde legt, und den  
en Reihen, auf die Herr Poincaré (Sur les fonctions uni-  
etc., Clebsch Ann. XIX., s. diesen Bd. p. 344) die Bil-  
on Transcendenten, welche die Modulfunctionen als spe-  
Fall in sich schliessen, basirt, eine sehr einfache Be-  
besteht.

M.

JOHNSON. On the derivation of elliptic function  
ulae by transformation to the reciprocal and com-  
plementary modulus. Mess. (2) XI. 138-141.

ansformationen der Functionen  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$  mit dem  
 $k$  in solche mit dem Modul  $k'$ ,  $\frac{1}{k'}$ ,  $\frac{ik}{k'}$ ,  $\frac{ik'}{k}$ ,  $\frac{1}{k}$ .  
fasser bedient sich der Bezeichnungen des Herrn Glaisher,

$\operatorname{sc} u$ ,  $\operatorname{ns} u$  etc. für  $\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$ ,  $\frac{1}{\operatorname{sn} u}$  etc., und geht noch

n der analogen Bedeutung von  $s_v$ ,  $c_v$ ,  $d_v$  etc. Wenn z. B.  
 $s_1$ ,  $n_1$  und  $s_2$ ,  $c_2$ ,  $d_2$ ,  $n_2$  sich auf die Argumente  $u$  und  $v$   
ziehen, und  $S$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $N$  auf  $u+v$ , so lassen sich die  
stheoreme so schreiben:

$$S = \frac{1}{n_1^2 n_2^2} (s_1 n_1 c_2 d_2 + s_2 n_2 c_1 d_1),$$

$$C = \frac{1}{n_1^2 n_2^2} (c_1 c_2 n_1 n_2 - s_1 s_2 d_1 d_2),$$

$$D = \frac{1}{n_1^2 n_2^2} (d_1 d_2 n_1 n_2 - k^2 s_1 s_2 c_1 c_2),$$

$$N = \frac{1}{n_1^2 n_2^2} (n_1^2 n_2^2 - k^2 s_1^2 s_2^2).$$

Es werden nun die Aenderungen in den Buchstaben  $s, c$  angegeben für die oben erwähnten fünf Transformationen.

Glr. (M.).

POCROVSKY. Beziehungen zwischen den Moduln und il  
Complementären bei der Transformation 5<sup>ten</sup> Gr  
der elliptischen Functionen. Mosk. S. X. Lief. I. (Russi

Durch Anwendung der allgemeinen Formeln von Jacob  
Transformationen ungraden Grades werden hier die beider  
genden Gleichungen gefunden:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{K} \sqrt{A} (\sqrt[4]{K} - \sqrt[4]{A}) &= \sqrt[4]{K'} \sqrt{A'} (\sqrt[4]{A'} - \sqrt[4]{K'}), \\ \sqrt[4]{K} \sqrt{A_1} (\sqrt[4]{A_1} - \sqrt[4]{K}) &= \sqrt[4]{K'} \sqrt{A'_1} (\sqrt[4]{K'} - \sqrt[4]{A'_1}). \end{aligned}$$

Ty.

E. H. GLAISHER. Formulae for  $\sin 8u$ ,  $\operatorname{cn} 8u$ ,  $\operatorname{dn} 8u$   
terms of  $\operatorname{sn} u$ . Edinb. Proc. XXXII. 480-485.

Die entsprechenden Formeln für  $7u$  waren 1861 von B  
in Grunert Arch. XXXVI. gegeben worden. Hier sind sie  
 $8u$  erweitert. Die Berechnungen geschehen mit Hülfe  
Functionen  $P, Q, R, S$ , welche die drei Zähler und die Ne  
in den Ausdrücken  $\operatorname{sn} 4u$ ,  $\operatorname{cn} 4u$  und  $\operatorname{dn} 4u$  sind.

Cly. (O.).

**ELY.** The algebraic solution of the modular equation for the septic transformation. Lond., M. S. Proc., XIII. 156.

ausgehend von der Cayley'schen Form

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{1-x}{1+x} \left( \frac{1-\alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3}{1+\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3} \right)^2$$

Die Transformation siebenten Grades gelangt Herr Ely auf analytischem Wege zu der Modulargleichung

$$(1-u^8)(1-v^8) = (1-uv)^8$$

die Transformation.

M.

**N LILIENTHAL.** Ueber zwei Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind. Zeitschrift für Mathematik und Physik J. XCIII. 237-256.

Die Coordinaten der hier betrachteten beiden Schaaren von Curven haben die Form:

$$\begin{aligned} &= i \cos \alpha \{ \psi(u-a_1) - \psi(u-a_2) + \psi(u-a_3) - \psi(u-a_4) \}, \\ &= i \sin \alpha \{ \psi(u-a_1) - \psi(u-a_2) - \psi(u-a_3) + \psi(u-a_4) \}, \\ &= \psi(u-a_1) + \psi(u-a_2) - \psi(u-a_3) - \psi(u-a_4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\wp^{(2r-1)}(u-a_\alpha) + \lambda \wp^{(2r-3)}(u-a_\alpha) + \lambda_1 \wp^{(2r-5)}(u-a_\alpha) + \dots \\ &+ \lambda_{r-2} \wp'(u-a_\alpha) - \lambda_{r-1} \frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_\alpha) = \psi(u-a_\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \cos \alpha \{ \psi(u-a_1) + \psi(u-a_2) + \psi(u-a_3) + \psi(u-a_4) \}, \\ &= \sin \alpha \{ \psi(u-a_1) + \psi(u-a_2) - \psi(u-a_3) - \psi(u-a_4) \}, \\ &= i \{ \psi(u-a_1) + \psi(u-a_2) - \psi(u-a_3) + \psi(u-a_4) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u-a_\alpha) + \lambda \wp^{(2r-2)}(u-a_\alpha) + \dots + \lambda_{r-2} \wp''(u-a_\alpha) + \lambda_{r-1} \wp(u-a_\alpha) \\ &= \psi(u-a_\alpha) \end{aligned}$$

Es ist, und



Die hier angeführten Sätze betreffen Polygone von  $m$  Seiten, die einem Kreise eingeschrieben und einem anderen Kreise umschrieben sind. Z. B.: „Ist ein Polygon von  $m$  Seiten einem Kreise eingeschrieben und einem zweiten Kreise umschrieben, so liegt der Schwerpunkt aller Berührungspunkte stets auf der Geraden beider Kreise, wie man auch das Polygon innerhalb beider Kreise verschieben mag.“ Dieser und ähnliche Sätze lassen sich mit Hülfe der elliptischen Functionen beweisen. Die dazu erforderlichen Formeln betreffen die Summen:

$$\sum_{m=1, \dots} \sin[\operatorname{am}(u + \overline{m-1}t) + \operatorname{am}(u + mt)],$$

$$\sum_{m=1, \dots} \cos[\operatorname{am}(u + \overline{m-1}t) + \operatorname{am}(u + mt)],$$

$$\sum \cos[\operatorname{am}(u + \overline{m-1}t) - \operatorname{am}(u + \overline{m+1}t)],$$

$$\sum \cos[\operatorname{am}(u + mt) - \operatorname{am}(u + \overline{m-1}t)],$$

$$\sum \operatorname{cn}(u + \overline{m-1}t) \cdot \operatorname{cn}(u + mt),$$

$$\sum \operatorname{sn}(u + \overline{m-1}t) \cdot \operatorname{sn}(u + mt).$$

M.

ADELETTI. Alcuni corollari di un teorema del Prof. Fergola. Nap., Rend. XXI. 155-157.

Der oben angeführte Satz des Herrn Fergola wird dahin erweitert, dass die Polygone Ellipsen mit parallelen und konjugierten Axen eingeschrieben und umschrieben sind. Dieser Satz sowie eine Reihe ähnlicher, ergibt sich, indem man andere Functionen aufsucht, deren Wert bei der Aenderung der Polconstanten constant bleibt.

M.

TRUDI. Notizie retrospective intorno ai corollari detti dal socio Padeletti da alcuni recenti teoremi del Prof. Fergola. Nap., Rend. XXI. 170-172.

Herr Trudi weist auf den Zusammenhang hin, den die eben angeführten Sätze von Fergola und Padeletti mit seinen schon früher aus der Theorie der reciproken Polaren gewonnenen





## C. Hyperelliptische und Abel'sche Functionen.

UNGAR. Die Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale. Wien. Ber. LXXXVI. 893-908.

Das Problem der Reduction hyperelliptischer und Abel'scher Integrale auf Normalintegrale ist zuerst von Abel aufgestellt (Oeuvres I. XXVIII.) und für die binomischen Integrale durchgeführt (Oeuvres II. XVII.). In der vorliegenden Abhandlung wird eine Reduktionsformel aufgestellt, welche für alle Abel'schen Integrale giltig ist, aus der man die Möglichkeit, ein Abel'sches Integral auf algebraische Functionen zu reduciren, beurtheilen kann. Die allgemeinste Relation aber zwischen einem solchen Integral und algebraisch-logarithmischen Functionen wird auf die bekannten Gleichungen des Abel'schen Theorems zurückgeführt.

M.

PICARD. Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. C. R. XCIV. 1704-1707.

In einer früheren Note (C. R. XCIII. 1126; s. F. d. M. XIII. 1881) 379) hatte Herr Picard gezeigt, wie sich das hyperelliptische Integral, das dem Polynom fünften Grades

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)$$

entspricht, auf elliptische Integrale zurückführen lässt. Im Vorliegenden wird die algebraische Substitution, welche die Transformation des genannten Integrals bewirkt, eingehender erörtert.

M.

HANEL. Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische. Breslau. Köhler.

C. MALET. On certain definite integrals. Dublin. Trans. XXVIII. 1882.

Die hier behandelten Integrale ähneln einer gewissen Klasse



Y. Reduction of  $\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$  to elliptic integrals.  
 XI. 142-143.

Der Verfasser zeigt, dass, wenn

$$x = \frac{-1 + \theta \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 + \theta \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u},$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} \theta u,$$

wo  $\theta^3 = -1 + \omega$ , und  $\omega$  eine imaginäre dritte Einheits-  
 Glr. (M.).

L. Sur un cas de réduction des fonctions  $\Theta$   
 à variables à des fonctions  $\Theta$  d'une variable.  
 XIV. 421-424.

L. Sur des cas de réductions des fonctions  $\Theta$   
 à plusieurs variables à des fonctions  $\Theta$  d'un moindre  
 nombre de variables. S. M. F. Bull. X. 59-67.

i

$$\Theta(x, y) = \sum_{m, n = -\infty}^{m, n = +\infty} e^{mx + ny + m^2\alpha + 2mny + n^2\beta},$$

über alle ganzzahligen  $m$  und  $n$ , und die normalen  
 der entsprechenden Abel'schen Functionen seien:

$$\text{für } x \quad 2\pi i, 0, 2\alpha, 2\gamma,$$

$$\text{für } y \quad 0, 2\pi i, 2\gamma, 2\beta.$$

Wenn zwischen den letzten Perioden eine Gleichung von

$$2k\gamma = 2k'\beta + 2k''\pi i,$$

wo  $k, k', k''$  ganze Zahlen sind, so lässt sich  $\Theta(x, y)$  durch Func-  
 tionen einer Variablen ausdrücken. Diese in der ersten Note  
 Reduction lässt sich nun, wie in der zweiten Abhand-  
 lung gezeigt wird, verallgemeinern. Es wird nämlich die



2 wird der Beweis durchgeführt, für die höheren Fälle nur deutet.

1. FORSYTH. A memoir on the theta-functions, particularly those of two variables. Phil. Trans. CLXXIII.

Die Abhandlung zerfällt in fünf Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird die sogenannte Rosenhain'sche Theorie der Thetafunctionen zweier Argumente entwickelt. Es wird nämlich nach Analogie der Methode von Prof. H. J. S. Smith für die einfachen Thetafunctionen (L. M. S. I.) ein allgemeines Theorem für Product von vier doppelten Functionen mit verschiedenen Charakteristiken und Variabeln hergeleitet. Definirt wird:

$$\Phi \left\{ \begin{pmatrix} \lambda, \varrho \\ \mu, \nu \end{pmatrix} x, y \right\}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m\lambda+n\varrho} \frac{1}{p^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2}} \frac{1}{q^{\frac{1}{4}(2n+\nu)^2}} \frac{1}{r^{\frac{1}{4}(2m+\mu)(2n+\nu)}} e^{(2m+\mu)\frac{i\pi x}{2K} + (2n+\nu)\frac{i\pi y}{2A}}.$$

erhaltene Product wird gleich der Summe von 16 ähnlichen Producten; und die allgemeine Gleichung umfasst, wie gezeigt, 4096 besondere Fälle. Zwischen den Functionen werden identische Gleichungen aufgestellt; die 15 Quotienten aller, mit Ausnahme einer, werden als Functionen dieser einen, in der nämlichen Weise, in Gliedern zweier neuer Variabeln  $x_1, x_2$  ausgedrückt, wo  $x_1, x_2$  die oberen Grenzen der von der Irrationalität  $\sqrt{z(1-z)(1-k_1^2z)(1-k_2^2z)(1-k_3^2z)}$  abhängenden Integrale

Die Formeln enthalten ausser  $k_1, k_2$  und  $k_3$  die vier Constanten  $A, B, A', B'$ .

Im zweiten Abschnitt werden die obigen Functionen in trigonometrische Reihen nach steigenden Potenzen von  $x$  und  $y$  entwickelt. Zu dem Zweck wird das Theorem

$$\Phi \left\{ \begin{pmatrix} \lambda, \varrho \\ \mu, \nu \end{pmatrix} x, y \right\} = e^{\frac{-2KA \log r}{\pi} \cdot \frac{d^2}{dx \cdot dy} \theta_{\mu, \lambda}(x) \theta_{\nu, \varrho}(y)}$$

benutzen, wo  $\theta_{\mu, \lambda}(x), \theta_{\nu, \varrho}(y)$  einfache Thetafunctionen sind. Hieraus erhält man die Ausdrücke für die vier Perioden erhalten, sowie ein



suchen den Differentialen  $dx, dy$  der Coordinaten eines Curvenpunktes, und wir können deshalb schreiben

$$d\omega = \frac{dx}{f'(y)} = - \frac{dy}{f'(x)},$$

und anstatt  $dx$  und  $dy$  das  $d\omega$  benutzen, um die Verrückung des Punktes auf der Curve auszudrücken. Wir nehmen der besseren Einfachheit halber eine Curve ohne Spitzen und Doppelpunkte, also vom Geschlecht  $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$  und betrachten

$m$  Durchschnittpunkte mit einer veränderlichen Curve  $\Sigma(x, y, 1) = 0$  von der Ordnung  $n$ . Bezeichnet dann  $\Sigma(x, y, 1)^{m-3}$  eine beliebige ganze rationale Function von  $x, y$  von der Ordnung  $m-3$ , so besagt das Abel'sche Theorem, dass zwischen den Verrückungen der  $m$  Durchschnittpunkte die Gleichung

$$\Sigma(x, y, 1)^{m-3} d\omega = 0$$

erfüllt, wo sich die Summe auf alle Werte von  $(x, y, 1)^{m-3}$  erstreckt, die zu den resp.  $m$  Durchschnittpunkten gehören.

Glr. (M.).

L. C. ROWE. Memoir on Abel's theorem. Phil. Trans. CLXXIII. 713-750.

Ein Auszug aus dieser Abhandlung ist erwähnt in F. d. M. II. (1880) p. 322. Sie ist im Wesentlichen eine Reproduction von Abel's grosser Abhandlung: „Sur une propriété générale d'une classe fort étendue de fonctions transcendentes“, 1826, Mém. de l'Académie des Sciences, Paris, t. 17, p. 375-454. Étranger. 1841, Werke, 2<sup>te</sup> Ausg. 145-211. Der erste Abschnitt (t. 1-10) enthält eine Untersuchung des Hauptsatzes in der Abel'schen Abhandlung. Durch Anwendung eines Satzes von Abel wird das Theorem etwas einfacher geschrieben in der Form

$$\int f(x, y) dx = \Theta \left[ \frac{1}{f_2(x) F_2(x)} \right] F_0(x) \cdot \sum \frac{f_1(x, y)}{\lambda'(x, y)} \log \theta(y) + C,$$

der Gleichung (37) bei Abel entspricht. Es folgen einige Beispiele für das Theorem. Im zweiten Abschnitte wird gezeigt, dass sich aus den Resultaten des ersten Abschnittes ergibt, dass die Summe einer beliebigen Zahl von Integralen der





**Verfasser** in der Abhandlung: „On the higher singularities, plane curve“, Quart. J. VII. (1866) gegeben hat.

Cly. (M.).

**CAYLEY.** A memoir on the Abelian and Theta-functions. Sylv., Am. J. V. 137-180.

in Teil der Vorlesungen, die Herr Cayley im Jahre 1882 an der Universität zu Baltimore gehalten hat. Das hier Mitgetheilte bezieht sich auf das Abel'sche Theorem und dessen Bestandtheile und schliesst sich eng an die Theorie der Abel'schen Functionen von Clebsch und Gordan an.

H. St.

**LIAPPEL.** Sur les fonctions abéliennes. C. R. XCIV. 1882-1704.

Das Theorem von Liouville über doppelt-periodische Functionen, dass die Summe der Werte der Variablen, für welche eine doppelt-periodische Function in einem Elementarparallelogramm null und unendlich wird, bis auf Vielfache der Perioden constant ist, wird auf die zu den Abel'schen Integralen gehörigen hyperfuchsianischen periodischen Functionen ausgedehnt. Wir bemerken, dass sich das Resultat ohne Schwierigkeit aus Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen ergibt (Riemann's Ges. Werke p. 133).

H. St.

**FORSYTH.** On a theorem of Jacobi's. Quart. J. XVIII. 1883-327.

Es wird der von Jacobi herrührende, von Clebsch und Jordan in der Theorie der Abel'schen Functionen zum Beweis des Abel'schen Theorems verallgemeinerte Satz nach Abel's Methode bewiesen.

H. St.

**RAWSON.** Solution of a question (6640). Ed. Times 1881 XVI 91-92.

Sind  $\varphi_1(x)$ ,  $\theta(x, y)$  und  $\varphi_2(x)$  rationale Functionen in  $x$  und  $y$  und ist die Function

$u = \{\varphi_1(x) \theta(x, y) + 1\}^2 - \varphi_2(x) = (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_n)$ ,  
so ist

$$\int \frac{\psi(y_1) dy_1}{\varphi_1(y_1) \cdot [\varphi_2(y_1)]^{\frac{1}{2}}} + \dots + \int \frac{\psi(y_n) dy_n}{\varphi_1(y_n) \cdot [\varphi_2(y_n)]^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{1}{x} \left| \frac{\varepsilon \psi(x)}{\varphi_1(x) [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \log \frac{\varphi_1(x) \theta(x, y) + 1 - [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi_1(x) \theta(x, y) + 1 + [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}} \right|,$$

wo  $\varepsilon = \pm 1$  und das Zeichen  $\frac{1}{x} \left| f(x) \right|$  die Coefficienten von  $\frac{1}{x}$  der Entwicklung von  $f(x)$  bedeuten möge.  $\psi(x)$  kann rational oder irrational sein; wenn  $\psi_1(x)$  rational ist, und  $\varphi_1(x) = x$  so hat man das Abel'sche Theorem. Beim Beweise wird angenommen, dass  $u = 0$  keine gleichen Wurzeln habe.

M.

R. RAWSON. Solution of a question (6659). Ed. Triest. XXXVI. 31-33.

Es sei

$$F(x, y) = (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_n), \\ \psi(x, z) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m,$$

und  $f(x)$  eine rationale Function von  $x$ , deren Dimension kleiner als  $n$ , dann ist der Coefficient von  $\frac{1}{x^{m-1}}$  in dem Integral

$$f(x) \int \frac{\psi(x, y)}{F(x, y)} dy$$

gleich

$$\int \left\{ \frac{f(y_1) \psi(y_1, y) y_1^m}{\frac{dF(y_1, y)}{dy_1}} + \dots + \frac{f(y_n) \psi(y_n, y) y_n^m}{\frac{dF(y_n, y)}{dy_n}} \right\} dy + C.$$

Hiervon wird eine Anwendung gemacht auf den Beweis Abel'schen Theorems für die Summe von  $n$  ultraelliptischen Integralen.

M.

2. Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln Abel'schen Integrale. Hoppe Arch. LXVIII. 196-216.

1. denselben Methoden, mit deren Hülfe Herr Königs-  
1. der 5<sup>ten</sup> Vorlesung seines Buches: „Vorlesungen über  
die der hyperelliptischen Integrale“ Beziehungen zwischen  
odicitätsmoduln der allgemeinsten hyperelliptischen In-  
welche in gegebenen Punkten wie gegebene Functionen  
werden sollen, aufgestellt hat, werden hier analoge  
n zwischen den Periodicitätsmoduln der allgemeinen  
n Integrale gewonnen. Da aber die Fläche im Unend-  
unkte aus mehreren Blättern besteht, von denen einige  
andere in Verzweigungspunkten zusammenhängend sein  
so muss man hier die Annahme machen, dass im Un-  
itspunkte die Function auf einigen Blättern, auf denen  
utig ist, und ebenso in einigen von den in der Unend-  
egenden Verzweigungspunkten unendlich werden soll.

M.

ÖMILCH. Ueber Reihenentwickelungen für ge-  
hyperelliptische Integrale. Schlömilch Z. XXVII,

dem Doppelintegral

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-x^2) \cos^2 \vartheta + (1-k^2 x^2) \sin^2 \vartheta}$$

das hyperelliptische Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu (1-k^2 x^2)^{1-\mu}} \quad (0 < \mu < 1)$$

Entwicklung gewonnen:

$$\sum \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} (n-\mu)_n \left[ l\left(\frac{2}{k'}\right) - s_{2n} + t_n \right] k'^n,$$

$$t = \frac{1}{2}, \quad t_n = l_2 - s_{2n} \quad \text{mit Legendre's Darstellung des}$$







2 Grades in einen Kettenbruch ergeben, durch die  $\vartheta$ -Functionen Veränderlichen gegeben werden. Der erste Teil ist  $\vartheta$ -Function gewidmet: nachdem dieselbe durch eine Reihe von Beispielen ist, werden aus dieser Definition die Functionalgleichungen hergeleitet, und dieselben für das Auffinden der algebraischen Functionen zwischen  $\vartheta$ -Quadraten und  $\vartheta$ -Producten und auch ihrer partiellen Derivirten zu Grunde gelegt, was nach der Methode von Hermite erreicht wird. Da bei der Coefficientenbestimmung die von Rosenhain ohne Beweis gegebenen Formeln, die die Functionaldeterminanten der  $\vartheta$ -Function für Nullwerte der Variabeln geben, gebraucht werden, so werden dieselben auf dem von Weber angedeuteten Wege durch Transformation zweiten Grades der  $\vartheta$  bewiesen. Keine geringe Rolle spielen bei allen diesen Entwicklungen die Eigenschaften der Charakteristiken der  $\vartheta$  (die Bezeichnungsart der  $\vartheta$  ist die von Weierstrass); weshalb dieselben in einem besonderen Paragraphen zusammengestellt werden. Zuletzt werden zwei neue Veränderliche eingeführt, in denen

$$\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix}^2(v_1, v_2)}{\vartheta^2(v_1, v_2)} = \frac{(\alpha_0 - x_1)(\alpha_0 - x_2)}{\sqrt{\alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \alpha_{04}}},$$

$$\frac{\vartheta \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}^2(v_1, v_2)}{\vartheta^2(v_1, v_2)} = \frac{(\alpha_1 - x_1)(\alpha_2 - x_2)}{\sqrt{\alpha_{01} \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14}}}.$$

w. gesetzt werden, und es wird bewiesen, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen in die algebraischen Gleichungen zwischen den Quotienten von  $\vartheta$ -Quadraten stattfindenden Gleichungen, für diese Quotienten eingesetzt, denselben Genüge thun; dann wird mit Hilfe der Ausdrücke der Derivirten von  $\vartheta$ -Quotienten durch die Gleichungen bewiesen, dass zwischen beiden Systemen der Veränderlichen eine ultraelliptische Beziehung besteht.

Da aber, wie schon erwähnt, es schwer ist, auf diesem Wege die Abhängigkeit der  $\vartheta$ -Moduln von den Periodicitätsmoduln der ultraelliptischen Integrale (wegen der doppelten Zeichen der Quadratwurzel) genau zu bestimmen, so kehrt in diesem Moment





ergibt sich für  $C$  sofort der Wert

$$C = - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} l(\sigma, \xi, s_{\mu, \xi}, z_{\mu, \xi}),$$

ist  $C$  durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung stellt. In dem Vorliegenden wird nun diese Summe durch andere Integrale und durch algebraische Functionen dargestellt.

Nachdem der allgemeine Fall behandelt worden ist, wird der Fall zweiblättriger Flächen unabhängig vom allgemeinen vollständig ausgeführt. Die Schwierigkeiten des allgemeinen lassen sich für  $p = 3$  überwinden, wie der Verfasser zeigen wird. M.

---

RYM. Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig. Teubner.

RAZER. Theorie der zweifach unendlichen Thetafunctionen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Leipzig. Teubner.

RYM. Kurze Ableitung der Riemann'schen Thetaformel. Kronecker J. XCIII. 124-131.

RYM. Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. Acta math. III. 1-15.

RYM. Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta math. III. 18-40.

RAZER und F. PRYM. Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel. Acta math. III. 41-77.

RAZER. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Leipzig. Schrift. 1883.

Die vorstehenden Abhandlungen sind, obwohl verschiedenen Verfassern angehörend, als Ganzes aufzufassen und zu betrachten. Den Mittelpunkt derselben bildet eine für die Theorie der Thetafunctionen fundamentale Formel, welche Herrn Prym



$$u_{\mu}^{(1)} + u_{\mu}^{(2)} + u_{\mu}^{(3)} + u_{\mu}^{(4)} = 2v_{\mu}^{(1)}.$$

$$u_{\mu}^{(1)} + u_{\mu}^{(2)} - u_{\mu}^{(3)} - u_{\mu}^{(4)} = 2v_{\mu}^{(2)},$$

$$u_{\mu}^{(1)} - u_{\mu}^{(2)} + u_{\mu}^{(3)} - u_{\mu}^{(4)} = 2v_{\mu}^{(3)},$$

$$u_{\mu}^{(1)} - u_{\mu}^{(2)} - u_{\mu}^{(3)} + u_{\mu}^{(4)} = 2v_{\mu}^{(4)},$$

Auflösung von gleichem Bau ist, so hat die Riemann'sche Formel die Gestalt

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta(2u^{(1)}) \cdot \vartheta(2u^{(2)}) \cdot \vartheta(2u^{(3)}) \cdot \vartheta(2u^{(4)}), \\ = \frac{1}{2^p} \cdot \sum_{\epsilon} \vartheta_{\epsilon}(2v^{(1)}) \cdot \vartheta_{\epsilon}(2v^{(2)}) \cdot \vartheta_{\epsilon}(2v^{(3)}) \cdot \vartheta_{\epsilon}(2v^{(4)}), \end{array} \right.$$

Summation der rechten Seite über die sämtlichen  $2^{2p}$  Thetacharakteristiken  $\epsilon$  auszudehnen ist. Für diese gibt Herr Prym drei Beweise. Der erste derselben (p. 1 ff.) hat ein historisches Interesse, insofern er noch vorgelegt wurde und dessen Zustimmung fand, gleichwohl auch ein functionentheoretisches Interesse, insofern es auf einem von Riemann in seinen Vorlesungen 1861/62 geäußerten Princip der Zerlegung einer periodischen Function in der Periode  $2\pi i$ , enthalten in der Identität

$$f(x) = \frac{f(x) + f(x + \pi i)}{2} + \frac{f(x) - f(x + \pi i)}{2}.$$

Successive Anwendung dieses Principis auf die linke Seite (R) führt zu einer Gleichung der Form (R), mit dem Unterschied, dass jedes Glied der rechten Seite noch mit einem bestimmten Factor  $C_{\epsilon}$  multiplicirt erscheint. Die nähere Untersuchung der  $2^{2p}$  Constanten  $C_{\epsilon}$  zeigt dann, dass dieselben sämtlich denselben Wert  $A$  haben, der  $= \frac{1}{2^p}$  gefunden wird. Einen

kürzeren Beweis der Gleichung (R) enthält No. III. Sie geht aus von der auf der rechten Seite in (R) stehenden Function. Betrachtet man dieselbe als Function der  $p$  Variablen  $u_1^{(1)} \dots u_p^{(1)}$  und setzt dieselbe  $= \Phi(2u^{(1)})$ , so ergeben sich für diese Function zwei Functionalgleichungen, welche zeigen, dass  $\Phi(2u^{(1)})$  bis auf einen von den  $u_{\mu}^{(1)}$  unabhängigen Factor  $\vartheta(2u^{(1)})$  mit der Function  $\vartheta(2u^{(1)})$  ist. Da das Entsprechende



Die letzte Beschränkung der Summationsbuchstaben lässt aufheben, wenn man hinter den äusseren Summenzeichen  $\Sigma$  Factor einschaltet, der stets von selber verschwindet, so-  
 bald  $s$  eine ungrade Zahl ist. Man erhält so an Stelle von  $F'$   
 eine neue Summe  $F''$ , die sich identisch erweist mit der rechten  
 Seite in (R).

$$(4) \quad \begin{cases} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \dots + c_{1n}x^{(n)} = r.y^{(1)}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \dots + c_{nn}x^{(n)} = r.y^{(n)}, \end{cases}$$
$$c_{1\mu} c_{1\mu'} + c_{2\mu} c_{2\mu'} + \dots + c_{n\mu} c_{n\mu'} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \mu' \neq \mu, \\ r^2 & \text{wenn } \mu' = \mu. \end{cases}$$

Operirt man nun genau wie oben, indem man zwei Systeme von Variablen  $u_{\mu}^{(1)}, \dots, u_{\mu}^{(n)}$  und  $v_{\mu}^{(1)}, \dots, v_{\mu}^{(n)}$  ( $\mu = 1, \dots, p$ ) und einerlei Summationsbuchstaben  $m_{\mu}^{(1)}, \dots, m_{\mu}^{(n)}$  und  $n_{\mu}^{(1)}, \dots, n_{\mu}^{(n)}$  durch die Gleichungen (4) verbindet, so gelangt man zu einer allgemeinen Formel (Gl.  $\Theta$  No. V. p. 35 oder Gl. (9) No. I. 44), welche die Riemann'sche Formel (R) als speciellen Fall enthält, aber noch nicht die einfache Structur derselben zeigt. Diese Structur wird durch den Charakter der Gleichungen (3) klingen. Um diesen Charakter auf die Gleichungen (4) zu übertragen und zu der wahren Verallgemeinerung der Formel (R) zu gelangen, muss man das System (4) der Bedingung unterwerfen,



Charakteristiken  $a_1, a_2, \dots, a_{2p+1}, 0$  besprochen, aus dem sich die sämtlichen  $2^{2p}$  Charakteristiken nach einem einfachen Schema zusammensetzen lassen.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \vartheta_\varepsilon(2u) \cdot \vartheta_{\varepsilon+\varrho}(2v) \cdot \vartheta_{\varepsilon+\sigma}(2w) \cdot \vartheta_{\varepsilon-\varrho-\sigma}(2t) &= x_\varepsilon, \\ \vartheta_\eta(2u') \cdot \vartheta_{\eta+\varrho}(2v') \cdot \vartheta_{\eta+\sigma}(2w') \cdot \vartheta_{\eta-\varrho-\sigma}(2t') &= x'_\eta, \\ c_{\varepsilon\eta} &= c_{\eta\varepsilon} = (-1)^{\varepsilon|\eta}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon|\eta = \sum_x (\varepsilon_x \eta'_x - \varepsilon'_x \eta_x),$$

gibt die Riemann'sche Thetaformel (R) Relationen der Form (I. p. 84)

$$(S) \quad 2^p \cdot k'_\eta = \sum_\varepsilon c_{\eta\varepsilon} \cdot x_\varepsilon,$$

die Summen der rechten Seite über sämtliche  $2^{2p}$  Charakteristiken  $\varepsilon$  auszudehnen ist. Die  $2^{2p}$  in (S) enthaltenen Gleichungen stellen ein System dar, welches orthogonal und involutorisch ist und die Grundtypen der verschiedenartigen Thetarelationen liefert. Das System (S) nimmt eine ungemein übersichtliche Gestalt an, wenn man die Charakteristiken  $\varepsilon$  und  $\eta$  in gewisser Weise, die Herr Prym die natürliche nennt, anordnet. Aus (S) lassen sich durch Addition Gleichungen der Form (I. c. p. 88)

$$(S') \quad 2^{p-m} \cdot \sum_a c_{\zeta a} \cdot x'_{\eta a} = c_{\eta\zeta} \cdot \sum_b c_{\zeta b} \cdot x_{\eta b},$$

wo  $\eta$  und  $\zeta$  beliebige Charakteristiken, und wo die Summe der linken Seite über sämtliche  $r = 2^m$  Charakteristiken eines zur Zahl  $m$  gehörigen, vollständigen Systemes  $a$ , die der rechten Seite über sämtliche  $s = 2^{p-m}$  Charakteristiken eines durch  $\zeta$  und das System  $a$  bestimmten, zur Zahl  $2p-m$  gehörigen, vollständigen Systems  $b$  auszudehnen ist. Das System der Gleichungen (S') ist äquivalent mit dem System der Gleichungen (S) und enthält das letztere als speciellen Fall ( $m = 0$ ). Das System der  $r \cdot s$  Gleichungen (S') zerfällt in  $s$  Gruppen von je  $r$  Gleichungen, welche die Grössen  $x'$  und  $x$  in bestimmter Weise trennen, nämlich so, dass in einer solchen Gruppe die linke Seite jeder Gleichung immer dieselben  $r$  Grössen  $x'$  enthält, während irgend eine rechte Seiten dieser Gleichungen niemals jene Grösse





von unabhängigen Gleichungen zu reduciren. Dies Problem ist in doppelter Weise gelöst, indem das eine Mal in Verallgemeinerung des Rosenhain'schen Verfahrens, vier Functionen, deren Charakteristiken ein beliebiges Vierersystem zweiter Art bilden, das andere Mal, in Verallgemeinerung des Göpel'schen Verfahrens vier Functionen, deren Charakteristiken ein Vierersystem erster Art bilden, als Ausgangspunkt dienen. Hierbei tritt sich ein bis dahin nicht bemerkter Parallelismus zwischen Untersuchungen von Göpel und Rosenhain. Den Schluss bildet das Additionstheorem der Thetafunctionen für  $p = 2$ .

Die zweite Abhandlung (No. VII) steht im Zusammenhang mit den Untersuchungen der Herren Klein und Bianchi (Clebsch Ann. XVII. 234, siehe F. d. M. XII. (1880) 352) über die Normalcharakteristiken dritter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung (nach Klein's Bezeichnung). Alle dreitheiligen Charakteristiken lassen sich durch neue Normalcharakteristiken ausdrücken, und es ist die Aufgabe, die zwischen den zugehörigen neun fundamentalen Thetafunctionen bestehenden Relationen aufzustellen und in ihrer Abhängigkeit von einander zu untersuchen. Alle diese Relationen sind enthalten in der obigen Formel ( $\Theta_2$ ), gestaltet für  $p = 1$ ,  $r = 3$ . Aus ihr ergeben sich, wenn man die links und rechts auftretenden Producte von je sechs Thetafunctionen resp. mit  $x'$  und  $x$  bezeichnet, die den Gleichungen (S) und (S') entsprechenden Systeme von je neun Gleichungen. Jede der Gleichungen (S') enthält drei der Grössen  $x$  und drei der Grössen  $x'$ , wobei die den drei  $x$  und die den drei  $x'$  zugehörigen Normalcharakteristiken je ein „Dreiersystem“ bilden, d. h. ein System von drei Charakteristiken, deren Summe der Charakteristik (0) congruent ist. Durch Specialisirung der Variablen erhält man zweierlei Thetarelationen, die linear in den Producten von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen  $\vartheta_\epsilon(v)$ , letzteren vom zweiten Grad in den Producten von je drei über  $\vartheta_\epsilon(0)$ . Die Relationen der zweiten Art lassen sich auf die noch von einander abhängige Gleichungen zurückführen, deren Hilfe sich die Quotienten der Producte von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen Functionen  $\vartheta_\epsilon(0)$  rational aus-



COLAS. Étude des fonctions de Fourier (première espèce). Ann. de l'Éc. Norm. Suppl. (2) XI. 3-90. Fortgesetzt im nächsten Bande.

CALAN. Sur les fonctions  $X_x$  de Legendre. Second Mémoire. Belg. Mém. XLIV. 1-102.

Fortsetzung der Arbeit, die im vorigen Bande p. 394 begonnen ist. Sie enthält mehr als 200 Formeln. Eine Inhaltsangabe ist daher unmöglich. Besonders hervorzuheben sind:

$$\int_0^\pi \frac{A + B\sqrt{-1} \cos x}{(B - A\sqrt{-1} \cos x)^2} dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_0^\pi d\omega \cos [\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cos \omega] = 2\pi.$$

und  $b$  Wurzeln von  $\frac{dX_n}{dx} = 0$ , so hat man:

$$\int_a^b X_x dx = 0.$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_n + X_{n+1})}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}} = 2 \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2} + 1 - zx} = \sum_1^\infty \frac{dX_n}{dx} \frac{z^{n-1}}{n(n+1)},$$

$$\log \frac{z - x + \sqrt{1 - 2zx + z^2}}{1 - x} = \sum_1^\infty X_n \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} \log \frac{z^2 - x + \sqrt{1 - 2z^2x + z^4}}{1 - x} = 2\sqrt{2} \log \{(1 + z)^{1+z} (1 - z)^{1-z}\}.$$

$$X_n = \sum (-1)^{\frac{n+q}{2}} \frac{1.3.5 \dots (n-q-1).1.3.5 \dots (n+q-1)}{1.2.3 \dots q.1.2.3 \dots (n-q)}$$

$$X_n = \sum \frac{1.2.3 \dots n}{(1.2.3 \dots \lambda)^2.1.2.3 \dots (n-2\lambda)} (x^2 - 1)^\lambda (2x)^{n-2\lambda}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\log(1+x) dx}{(1 - 2zx + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1 - z^2} [\log 2 - (1 - z) \log(1 + z)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \sum X_n x^n,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} z^{2n} \int_{-1}^{+1} \frac{X_{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} \sum_0^{\infty} \left[ \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} \right]^2 (X_{2n+1} - X_{2n-1}).$$

Nach einer brieflichen Mitteilung von E. Heine an den Verfasser sind manche der Resultate nicht nur neu, sondern auch von Wichtigkeit für die Theorie der Kugelfunctionen.

Mn.

B. HANSTED. Généralisation de la fonction  $X_n$  de Legendre. Teixeira J. IV. 53-61.

Herr Hansted untersucht die Functionen  $P_n$  und  $Q_n$ , welche die particulären Integrale der Gleichung

$$(x-a)(x-b)y'' + [2x-(a+b)]y' - n(n+1)y = 0$$

sind. Er zeigt, dass  $P_n$ , wie die Legendre'sche Function  $X_n$ , der Coefficient von  $t^n$  in der Entwicklung nach den Potenzen von  $t$  der Quadratwurzel eines Polynoms zweiten Grades in  $t$  ist. Er weist ferner nach, dass zwischen  $P_{n+1}$ ,  $P_n$  und  $P_{n-1}$  eine Relation existirt, welche der zwischen  $X_{n+1}$ ,  $X_n$  und  $X_{n-1}$  analoge ist. Den Schluss der Arbeit bildet der Nachweis einer analogen Relation für  $Q$ .

Tx. (0.)

G. LEONHARDT. Integraleigenschaften der adjungirten Kugelfunctionen. Klein Ann. XIX. 578-587.

Der Verfasser knüpft an die im vorigen Jahre (cf. F. d. M. XIII. (1881) p. 399ff.) besprochene Arbeit des Herrn C. Neumann über Kugelfunctionen an und erweitert einige Resultate derselben. Aus den von C. Neumann aufgestellten Entwicklungen der einfachen Kugelfunctionen in Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten, ergeben sich analoge nach zugeordneten Kugelfunctionen fortschreitende Reihen für die adjungirten Kugelfunctionen. Mit Hülfe derselben wird der Werth des Doppelintegrals

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} L_q(\cos \gamma) K_{qj}(\mu) \cos(j\varphi) d\mu d\varphi$$

stellt, wo

$$\cos \gamma = \mu \cdot \mu_1 + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu_1^2} \cos(\varphi - \varphi_1)$$

während die Bedeutung von  $L_q$   $K_{qj}$  dieselbe ist, wie bei Neumann. Daraus folgt durch Anwendung des Additionstheorems der Kugelfunctionen der Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} L_{qj}(\mu) K_{qj}(\mu) d\mu,$$

welches Integral Herr C. Neumann nur für  $j = 0$  ermittelt hatte. In analogen Integralen, in denen das Product zweier adjungirter  $L$  oder zweier adjungirter  $K$  unter den Integralzeichen steht, haben die  $j$  keine Bedeutung.

Ausserdem wird (analog der allgemeinen Kugelfunction, der sogenannten Laplace'schen Function) der Begriff der „allgemeinen Kugelfunction“ eingeführt:

$$\mathfrak{Y}_q(\mu, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{qj}(\mu) [\alpha_j \cos(j\varphi) + \beta_j \sin(j\varphi)],$$

wo  $\alpha_j, \beta_j$  willkürliche, nur von  $j$  abhängige Constanten sind. Für diese Function gilt die Formel

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} L_q(\cos \gamma) \mathfrak{Y}_q(\mu, \varphi) d\mu d\varphi \\ &= \frac{4}{q^2 - q^3} [\mathfrak{Y}_q(\mu_1, \varphi_1) \cos(q\pi i) - \mathfrak{Y}_q(\mu_1, \varphi_1) \cos(q\pi i)]. \end{aligned}$$

Die Einführung der Function  $\mathfrak{Y}_q(\mu, \varphi)$  gestattet eine Kürzung der Aufgabe, die elektrische Verteilung auf einem Conoide (Fläche, die durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entsteht,) zu bestimmen. Die von Herrn C. Neumann gegebene Entwicklung der Dichtigkeit dieser Verteilung ist nämlich, wie am Schluss der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, nichts Anderes als eine Entwicklung nach allgemeinen Kugelfunctionen.

Wn.

M. GEGENBAUER. Das Additionstheorem derjenigen Functionen, welche bei der Entwicklung von  $e^{\alpha x}$  in den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche auftreten. Wien. Ber. LXXXI. 491-502.

Ableitung des folgenden, mit Recht als sehr allgemein bezeichneten Additionstheorems der Bessel'schen Functionen erster Art:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^\nu(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \varphi}) \\ = 2^\nu \prod(\nu - 1) \sum_{\varrho=-\infty}^{\varrho=\infty} (\varrho + \nu) (\alpha\beta)^{-\nu} J^{\varrho+\nu}(\alpha) J^{\varrho+\nu}(\beta) C_\varrho^\nu(\cos \varphi)$$

Wegen der Bezeichnung vergl. die Abhandlung des Verfassers über die Functionen  $C$  im gleichen Bande der Wiener Sitzungsberichte. Gr.

# Achter Abschnitt.

## Reine, elementare und synthetische Geometrie.

### Capitel 1.

#### Prinzipien der Geometrie.

CANTOR. Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Klein Ann. XX. 113-122.

Die früheren Untersuchungen des Verfassers (siehe F. d. M. **L.** (1880) 404) werden hier auf das ebene  $n$ -dimensionale Gebiet ausgedehnt. Gegenstand der Betrachtung ist vorzugsweise die Abzählbarkeit der Punktmengen. Die gewonnenen Resultate werden zur Ableitung interessanter Sätze im Gebiet der anschaulichen Mannigfaltigkeiten benutzt. So wird z. B. gezeigt, dass, wenn man aus dem drei-dimensionalen Raume die durch Coordinaten von algebraischem Wert bestimmten Punktmengen weglässt, der Rest des Gebietes noch stetigen Zusammenhang hat, woraus weiter folgt, dass auch in einem unstetig gedachten Raume noch stetige Bewegung möglich ist. Dies gilt für alle Räume, deren Dimensionenzahl  $\geq 2$  ist. Schg.

---

. BERTINI. Sui sistemi lineari. Lomb. Rend. (2) XV. 24-29.

Ein lineares System

$$U = L_1 u^1 + L_2 u^2 + \cdots + L_{s+1} u^{s+1} = 0,$$





it, Oktaeder, Sechzehnzell (Hexadekaedroid) geht aus der  $n$  durch das Gesetz der Reciprocität hervor. Aus den über  $n$ -dimensionale Gebilde gewinnt man rückwärts durch Inversion der betreffenden Figuren neue Sätze der ebenen und  $n$ -dimensionalen Geometrie. Die Untersuchung bewegt sich in einfachsten Methoden der Ausdehnungslehre.

Schg.

HOPPE. Innere Winkel aller regelmässigen linear verknüpften Figuren von vier Dimensionen. Hoppe Arch. VII. 110-112.

Ergänzung der in Bd. LXVII. 420-422 enthaltenen Resultate aus dem Band Abschn. VI. Cap. 3. p. 212) durch Berechnung des inneren Winkels im regelmässigen Fünfczelle (Pentatop). Nebenbei giebt sich das auch von Stringham gefundene Resultat, dass reguläre Gebilde höherer Dimensionen keine Fünfecke mehr enthalten können.

Schg.

HOPPE. Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionengeometrie. Hoppe Arch. LXVIII. 378-389.

Zwei Ebenen im vierdimensionalen Raume haben im Allgemeinen nur einen Punkt gemeinsam, bilden also nicht direct einen Winkel mit einander. Der Verfasser zeigt aber auf analytischem Wege, dass es zwei Winkel giebt, durch welche die gegenseitige Stellung dieser Ebenen ausgedrückt werden kann. Der erste (Raumwinkel) ist der kleinste Winkel, den zwei diese Ebenen enthaltende euklidische Räume durch Drehung um die Schnittlinie mit einander bilden können, der zweite (Flächenwinkel) ist der Winkel, den die Ebenen bilden, wenn die beiden Räume in ihrer vorher beschriebenen Stellung durch Drehung um ihre Schnittlinie zur Deckung gebracht werden. Beide Winkel werden berechnet und in ihren Beziehungen zu einander untersucht.

Schg.



**UDELMAN.** Vom Körper höherer Dimension. Pr. Kaisers-  
tern.

Im ersten Teile dieser Arbeit werden die beiden mit dem  
Tetraeder (Tetraeder) und Viereck (Hexaeder) beginnenden Reihen  
dimensionaler Gebilde aufgestellt, der zweite enthält Unter-  
suchungen über den Euler'schen Polyedersatz, im dritten sucht  
der Verfasser die Frage nach den regulären Gebilden des vier-  
dimensionalen Raumes zu beantworten, und gelangt dabei bis zur  
Zerlegung der elf ursprünglich sich darbietenden Möglichkeiten  
in die Ausscheidung von fünf derselben. Den Schluss bildet  
die Bemerkung, dass von den sechs wirklich vorhandenen Gebilden  
zwei die einfachsten die Specialfälle der im ersten Abschnitt  
behandelten Gebilde sind. Ein Anhang beweist die Sätze 1) dass  
n-netrische Körper mittelst Durchgangs durch den vierdimen-  
sionalen Raum zur Deckung gebracht werden können, 2) dass  
sich kreuzende Ebenen im vierdimensionalen Raume jederzeit  
in einem Punkt gemeinsam haben. Schg.

---

**STUDY.** Ueber Distanzrelationen. Schlömilch Z. XXVII.  
40-160.

Es wird eine Anzahl von Sätzen über Pyramiden und Kreis-  
flächen, die sich vereinzelt bei Baltzer, Darboux, Frobenius,  
Lagrange finden (siehe F. d. M. IV. (1872) 383, VI. (1874) 381,  
I. (1876) 531), aus der gemeinsamen Quelle einiger elemen-  
taren Sätze abgeleitet, meist unter Anwendung der Determinanten-  
methode. Die Arbeit ist ausserdem den Vorarbeiten insofern  
von allgemeiner Überlegenheit, als alle Sätze sogleich für  $n$ -dimen-  
sionale Gebilde bewiesen werden. Im Anfang ist eine grössere  
Anzahl von neuen geometrischen Sätzen und Formeln mitgeteilt,  
aus derselben Quelle fliessen. Schg.

---

**STOLZ.** Zur Geometrie der Alten, insbesondere über  
ein Axiom des Archimedes. Innsbr. Ber. XII. 74-89.



**STORY.** On the non-Euclidian trigonometry.

**Am. J.** IV. 332-336; V. 180-211.

**STORY.** Note on the non-Euclidian trigonometry.  
**opkins Circ.** 1882. 211.

Cayley hatte bei seiner Ableitung der Grundformel der nicht-euklidischen Trigonometrie (Clebsch Ann. V. 630-634, s. F. d. M. 1872) 241) als Fundamental-Kegelschnitt den Kreis, und für verschiedene constanten besondere Werte angenommen. Der Verfasser entwickelt diese Untersuchung in der ersten der oben genannten Abhandlungen auf beliebig angenommene Fundamentalgrößen aus und zeigt am Schluss die Uebereinstimmung seiner specialisirten Resultate mit der von Cayley gefundenen, die übrigens auch für andere Fundamental-Kegelschnitte als den Kreis gilt. Ausserdem findet sich eine einfache Ableitung für die Formeln der nicht-euklidischen ebenen aus denen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie.

In der zweiten Abhandlung bestimmt der Verfasser die grössten und kleinsten Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen der nicht-euklidischen Geometrie, erörtert die speciellen Fälle der parallelen und senkrechten Richtung, und giebt Formeln für den Inhalt des Parallelogramms und Parallelepipeds. Es geht dabei hervor, dass der Abstand zweier Gebilde bis zu einem constanten Factor unabhängig ist von dem Wege der Messung. Bei der schliesslichen Anwendung der gewonnenen Resultate auf die Geometrie der Kugel wird in ähnlicher Weise am Schluss der ersten Abhandlung der Zusammenhang zwischen den Formeln der nicht-euklidischen sphärischen und denen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie dargelegt.

Schg.

**ROX.** On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. **Cambr. Trans.** XIII. 69-143; **Cambr. Proc.** IV. 194-196.

Die vorliegende Arbeit will, im Anschluss an Grassmann, einen rein algebraischen Calcul aufstellen, dessen Gesetze mit



Den Relationen (I), (II), (III) entsprechen drei verschiedene Arten von Geometrie, nämlich (I) die nicht-euklidische Geometrie Lobatchewsky und Bolyai, (II) die gewöhnliche Geometrie, (III) die sphärische Geometrie.

Die verschiedenen Arten der Multiplication von Punkten findet man, wenn man das distributive Princip zu Hülfe nimmt. Es ergibt sich, dass die allgemeinsten Bedingungen folgende sind:

$$P^2 = Q^2 = \beta$$

constant, und ausserdem ist

$$P.Q + Q.P = 2\beta \cosh \theta \text{ in (I),}$$

$$P.Q + Q.P = 2\beta \text{ in (II),}$$

$$P.Q + Q.P = 2\beta \cos \theta \text{ in (III).}$$

Nach Einführung weiterer specieller Annahmen kann man verschiedene Arten der Multiplication erhalten. Diese sind 1) Grassmann's äussere Multiplication, die (für zwei Punkte) identisch ist mit der äusseren Multiplication der Quaternionen. 2) Grassmann's innere Multiplication, die (für zwei Punkte) identisch ist mit der inneren Multiplication der Quaternionen. 3) Die associative Quaternionen-Multiplication, die folgende Gesetze befolgt:

$$Q.P^{-1} = \cosh \theta + i \sinh \theta, \quad i^2 = 1 \text{ in (I),}$$

$$Q.P^{-1} = 1 + i\theta, \quad i^2 = 0 \text{ in (II),}$$

$$Q.P^{-1} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad i^2 = -1 \text{ in (III),}$$

wo  $i$  in jedem Falle eine specifische Constante ist, die der Verbindungslinie der Punkte  $P$  und  $Q$  eigenthümlich ist.

Weiter wird die Addition und Multiplication dreier Grössen betrachtet. Es wird gezeigt, dass, wenn  $i_1$  und  $i_2$  zwei specifische Constante sind, die zwei unter dem Winkel  $\theta$  gegen einander geneigten Linien angehören, und wenn

$$ri = pi_1 + qi_2,$$

so dann

$$r^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos \theta,$$

oder

$$i_2 i_1^{-1} = \cos \theta + Q \sin \theta$$

wo

$$Q^2 = -1:$$

kann als der Punkt angesehen werden, in dem sich die Linien schneiden.





die Componenten  $X, Y, Z$  die imaginären Grössen  $X + L\omega$ ,  $-M\omega$ ,  $Z + N\omega$  setzt, wo  $\omega^2 = -1$  in (I),  $\omega^2 = 0$  in (II),  $= 1$  in (III) ist.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man das System imaginärer **essen** für Räume von höheren Dimensionen erhalten kann aus **a** commutativen Producten niederer Systeme.

Glr. (Wn.).

**SCHLEGEL.** Geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Pr. Waren.

Die Arbeit liefert Ergänzungen zu des Verfassers „System **Raumlehre**“, indem verschiedene Sätze aus der Geometrie **Geraden** und des Kreises auf einfache Weise darin abgeleitet **werden**, z. B. das Stuart'sche Theorem, Satz des Pappus, Sätze vom **ascal'schen** und Brianchon'schen Sechseck, vom Kreise der mitt-  
**ren** quadratischen Entfernungen, Feuerbach'schen, Höhenpunkt-  
**und** Schwerpunktkreis etc. Ein Anhang enthält u. a. den Nach-  
**weis**, dass ein neuerdings von Lipschitz aufgestellter algebrai-  
**her** Calcül mit gewissen Operationen der Ausdehnungslehre  
**entisch** ist (s. F. d. M. XII. (1880) 303); ferner neues Material  
**as** dem Briefwechsel zwischen St. Venant, Cauchy und Grass-  
**ann**, betreffend die zwischen den beiden letzteren s. Z. schwe-  
**ende** Prioritätsangelegenheit, endlich ein Verzeichnis von Arbeiten  
**nderer** Autoren auf dem Gebiete der Ausdehnungslehre.

Schg.

**BÖKLEN.** Ueber die Rechnung mit Vektoren. Corr. Bl  
1882.

Vergleichende Zusammenstellung der von Argand, Hamilton, **cheffler** und Möbius aufgestellten Grundbegriffe und Operationen **er** Streckenrechnung, nebst einem Excurs über das Hankel'sche **ermanenz**princip und dessen Beurtheilung durch neuere Autoren. **nch** die einschlägigen Arbeiten von Grassmann, Bellavitis, Leibniz **nd** Gauss sind in der Einleitung berücksichtigt. Schg.

















wol annehmen, dass dies Buch an der passenden Stelle gute Dienste thut; und es ist jedenfalls ein Vorzug, dass in auf einem kleinen Raum ein verhältnismässig grosses Material bewältigt ist.

Mz.

DANGSCHAT. Geometrie für Mittelschulen. Danzig. F. Axt.

Dieses für Mittelschulen und ähnliche Unterrichtsanstalten bestimmte Buch behandelt in gedrängter Kürze die elementare Planimetrie und Stereometrie. Ein Vorzug des Buches sind die 182 an der Zahl das Verständnis erleichternden Figuren. Die Darstellung ist knapp, aber deutlich. In einem Anhange sind die Formeln für die Berechnung ebener und Raumfiguren zusammengestellt.

Mz.

H. NISSEN. Lehrbuch der Elementarmathematik.

Schleswig. J. Bergas.

Dieses für den Unterricht in Schullehrer-Seminarien und Schulen, sowie für den Selbstunterricht bestimmte Buch hat vier Teile: I. Teil: Arithmetik und Algebra, 1882; II. Teil: Planimetrie, 1877; III. Teil: Ebene Trigonometrie, 1882; IV. Teil: Stereometrie und sphärische Trigonometrie, 1880. Vom I., III. und IV. Teil ist die zweite Auflage erschienen. Der umfangreichste erste Teil behandelt die elementare Arithmetik, die Logarithmen, Progressionen, Rentenrechnung; ferner die Algebra bis zu den cubischen Gleichungen einschliesslich. In einem kurzen Anhange ist Einiges von den pythagoräischen Zahlen gesagt. Die im zweiten Teil gegebene Planimetrie geht bis zur Kreisberechnung einschliesslich. Im dritten Teil werden zuerst die trigonometrischen Functionen besprochen, wobei auch die unendliche Reihe für  $\cos x$  hergeleitet wird, dann die Anwendung der Trigonometrie auf das rechtwinklige, nachher auf das schiefwinklige Dreieck. Zuletzt sind die wichtigsten Formeln zusammengestellt, und das Kreisviereck behandelt. Der vierte Teil enthält die Stereometrie bis zur Berechnung von Kugel und Kegel ein-

















„Gegenecken in einem Punkte.“ In dieser Weise folgen noch mehrere Sätze. Mz.

PICART. Solution d'un problème de géométrie.

Nouv. Ann. (3) I. 33-39.

In einem gleichschenkligen Dreieck  $OAB$  sei der Basiswinkel bei  $A$  gleich dem  $n$ -fachen des Winkels an der Spitze  $O$ , man soll das Verhältniss der Basis  $AB$  zur Seite  $OA$  finden. Diese Aufgabe behandelt der Herr Verfasser, indem er den Winkel bei  $A$  in  $n$  gleiche Teile teilt; ferner Seite  $AB$  mit  $x$ , die Theilungslinien der Reihe nach mit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bezeichnet (wo also  $x_n$  mit  $OA$  zusammenfällt) und die Relationen aufstellt:

$$xx_2 - x_1^2 = \frac{xx_1^2 x_2}{R^2}, \quad x_1 x_3 - x_2^2 = \frac{x_1 x_2^2 x_3}{R^2}, \text{ etc.}$$

$$x_{n-2} x_n - x_{n-1}^2 = \frac{x_{n-2} x_{n-1}^2 x_n}{R^2},$$

welchen zu beachten, dass  $x_n = R, x_1 = x$ .

Aus diesen  $n-1$  Relationen geht durch Elimination von  $x_1, \dots, x_{n-1}$  die gesuchte Gleichung für  $\frac{x}{R}$  hervor.

Die letzte der angegebenen Relationen wird zu diesem Zweck als Differenzengleichung behandelt und integrirt. Es kommt dann:

$$\frac{1}{x_n} = Ca^n - C'a^{-n},$$

wo  $C, C', a$  drei Constante sind, die in der Beziehung stehen:

$$CC'(a^2 + a^{-2} - 2) - \frac{1}{R^2} = 0.$$

Schliesslich wird gezeigt, dass  $a + \frac{1}{a}$  aus den beiden Gleichungen eliminirt werden muss:

$$a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2},$$

$$a^{-1} + \frac{1}{a^{n-1}} - \left(a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}}\right) + \left(a^{n-3} + \frac{1}{a^{n-3}}\right) - \dots + (-1)^{n-1} = \frac{x}{R},$$



unde Kreis  $F$  jeden die drei Seiten des Dreiecks tangirenden  
s  $K$  berührt, bedient sich ganz elementarer Betrachtungen, so  
derselbe auf dem Gymnasium schon in Secunda vorgetragen  
den kann. Der Gedanke, welcher dem Beweise zu Grunde  
t, ist der, die Existenz eines Punktes nachzuweisen, welcher  
chzeitig auf dem Kreise  $F$ , auf dem Kreise  $K$  und auf der Ver-  
lungsgeraden der Mittelpunkte dieser beiden Kreise liegt. Die  
stellung des Beweises ist klar und durchsichtig. Hz.

M. TAYLOR. On a six-point circle connected with  
a triangle. Mess. (2) XI. 177-179.

Es seien  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  die Höhen des Dreiecks  $ABC$ ; ferner  
in  $Fc$ ,  $Da$ ,  $Eb$ , sowie  $E\beta$ ,  $F\gamma$ ,  $D\alpha$  Lote, die resp. auf die  
ten  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  gefällt sind. Dann liegen die Punkte  
 $\gamma$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\beta$  auf einem Kreise. Dies ist der Sechspunktekreis  
Herrn H. M. Taylor.

Ferner steht jedes der einander gleichen Dreiecke  $abc$ ,  $\alpha\beta\gamma$   
dem Dreieck  $ABC$  in dem Verhältnis

$$\sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} : 1.$$

Ist endlich  $\varphi$  der Winkel über der Sehne  $a\alpha$ , dessen Schei-  
einer der Punkte  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\gamma$  ist, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C.$$

Glr. (Wn.).

C. ROWE. Note on Mr. H. M. Taylor's six-point circle.  
Mess. (2) XII. 36.

Anderer Beweis, dass die im vorhergehenden Referat defi-  
ten sechs Punkte  $a$ ,  $\gamma$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\beta$  auf einem Kreise liegen.

Glr. (Wn.).

HEPPEL, L. A. KITTUDGE, W. J. C. MILLER. Solu-  
ions of a question (6667). Ed. Times XXXVI. 73-74.

Lösung der Aufgabe, ein Quadrat zu construiren, wenn die  
tände dreier Ecken desselben von einem festen Punkte ge-



CHSE. Ueber eine Eigenschaft des vollständigen recks. Hoppe Arch. LXVIII. 425-427.

nige bekannte Sätze vom vollständigen Viereck werden gemeinert, indem für die unendlich entfernte Gerade der eine beliebige Gerade substituiert wird. Die Beweise werden durch metrische Relationen geführt. Mz.

re Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Viereck und Viereck von D. EDWARDES, G. EASTWOOD, J. O'REGAN, G. HEPPEL, W. A. WHITWORTH, GALE, E. BUCK, J. YOUNG, CH. LADD, T. R. TERRY, RUTTER, G. M. REEVES, S. CONSTABLE, M. BAKER, J. WILLIS, W. H. BLYTHE, W. B. GROVE, R. KNOWLES. Siehe sich Ed. Times XXXVI. 34, 40, 101, 106, 108, 115; XXXVII. 35, 50, 83-84, 113, 124. Wn.

FALAN. Question (65.) Mathesis II. 85-88, 245-248.

$R$  der Radius des umschriebenen,  $r$  der Radius des einbeschriebenen Kreises eines regulären Polygons,  $\varrho$  der Radius des Kreises, welcher mit dem Polygon gleichen Umfang hat, so ist

$$\frac{1}{3}(r + 2R) > \varrho > \sqrt[3]{rR^2}.$$

Mn. (Wn.).

LER. Vervollständigung der Steiner'schen elementargeometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis den grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere Figur gleich grossen Umfanges. Gött. N. 1882.

Der Steiner'sche Beweis beruht auf der Voraussetzung, dass es eine Figur grössten Inhalts giebt. Die Vervollständigung hat der Verfasser bereits in Hoffmann Z. X. 245 (siehe F. d. M. XI.



um mehr als die Hälfte gegen die sonstige Methode ab-  
Mz.

SCHIAPPA MONTEIRO. Sobre a divisão em partes eguaes  
a distancia entre dois pontos e da circumferencia  
empregando o compasso ordinatio. Teixeira J. IV. 39-52.

Mascheroni hat bekanntlich zuerst eine Anzahl geometrischer  
Constructions nur mit Hülfe des Zirkels auszuführen gelehrt. In  
dem vorliegenden Aufsatz behandelt Herr Monteiro dieselben Auf-  
gaben, speciell die Teilung einer Geraden in eine beliebige An-  
zahl von Teilen, die Teilung des Kreisumfangs in fünf, acht,  
zwölf etc. Teile allein mittelst des Zirkels. Die benutzten  
Methoden sind von denen von Mascheroni verschieden.

Tx. (Wn.).

BAKER. Alhazen's problem. Its bibliography and  
an extension of the problem. Sylv. J. IV. 327-332.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. B. p. 24.

LOREL. Solution of a question (5592). Ed. Times XXXVI. 49.

Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu construiren, von dem  
Punkt des Umfanges gegeben ist, sowie zwei andere Punkte  
den Abständen  $\frac{1}{m}r$  und  $\frac{1}{n}r$  vom Mittelpunkte.

Wn.

W. B. GROVE, D. EASTWOOD, J. YOUNG, M. BAKER.  
D. EDWARDES, MATZ. Solutions of a question (6572).  
Ed. Times XXXVI. 62-63, 110-111.

Zieht man von den Endpunkten  $A$  und  $B$  des Durchmessers  
des Halbkreises die Tangenten  $AP$ ,  $BP$  an einen zweiten Kreis,  
der den ersten, sowie dessen Durchmesser  $AB$  berührt, so ist





und  $C'$  sein, wenn es das letzte sein soll. Geometrische Betrachtungen führen dann den Herrn Verfasser zu folgender Regel: Wenn zwei Spiegel sich unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, und wenn dieser Winkel durch den leuchtenden Punkt in die beiden Theile  $\varphi$  und  $\varphi'$  zerlegt wird, so findet man die Zahl der entstehenden Bilder auf folgende Weise. Man dividire das Supplement von  $\varphi$  durch  $\alpha$ . Geht die Division auf, so merke man sich den Quotienten; geht sie nicht auf, die nächst höhere ganze Zahl. Darauf verfähre man ebenso mit  $\varphi'$ . Die Summe der beiden gemerkten Zahlen ist immer die Zahl der Bilder. Zu beachten ist noch, dass in einigen Fällen die beiden zwischen  $C$  und  $C'$  fallenden letzten Bilder sich decken. Mz.

---

Nowosielski. Einige Eigenschaften des Systems zweier oder mehrerer Kreise. Jahresbericht des Gymnasiums in Sambor (Galizien). Polnisch.

Dn.

---

Hr. Nehls. Ueber graphische Rectification von Kreisbögen und verwandte Aufgaben. Hamburg, Jenichen.

Von den vier Grössen: Kreisbogen, Sehne, Centriwinkel und Radius sind zwei gegeben; die beiden andern durch Construction zu finden. Das Rectificationsmittel besteht in der Summirung einer Reihe kleiner Sehnen, die Abschätzung des Fehlers geschieht durch die Arcusreihe. Einige andere Curven werden in Betracht gezogen. H.

---

Weitere Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis von J. HAMMOND, B. EASTON, CURTIS, W. S. McCAY, G. EASTWOOD, E. RUTTER finden sich Ed. Times XXXVII. 50, 95-96, 96.

Wn.



**J. HÜBNER.** Ueber eine neue Ableitung der Formeln für  $\frac{\sin}{\cos}(\alpha + \beta)$ . Cas. XI. 214-215. (Böhmisch).

Unter Zugrundelegung des bekannten Satzes von Ptolemäus, **W** Viereck betreffend, wird die Ableitung der fraglichen Formeln kurz ausgeführt. **Std.**

**MOTT, J. O'REGAN.** Solutions of a question (6696). Ed. Times XXXVI. 53.

Ist

$$m \sin(\vartheta + \varphi) = \cos(\vartheta - \varphi),$$

ist auch

$$\frac{1}{1 - m \sin 2\vartheta} + \frac{1}{1 - m \sin 2\varphi} = \frac{2}{1 - m^2}.$$

**Wn.**

**A. CAYLEY.** Note on the formulae of trigonometry. J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Sind  $a, b, c$  die Seiten eines ebenen Dreiecks, und  $A, B, C$  deren bez. Gegenwinkel, so ist bekanntlich

$$a = c \cos B + b \cos C, \text{ u. s. w.}$$

Hier kann man nun

$$\cos A + i \sin A = \frac{x}{w}, \quad \cos B + i \sin B = \frac{y}{w}, \quad \cos C + i \sin C = \frac{z}{w}$$

setzen, woraus

$$2 \cos A = \frac{x}{w} + \frac{w}{x}, \text{ etc.}$$

folgt, und dann erhält man

$$-2ayzw + by(z^2 + w^2) + cz(y^2 + w^2) = 0$$

und zwei ähnliche Gleichungen. Eine analoge Betrachtung wird für das sphärische Dreieck angestellt. **Mz.**

WEILL. Sur un triangle dont les côtés sont exprimés par des nombres entiers, premiers entre eux et duquel le rapport de deux angles est un nombre entier. S. M. F. Bull. X. 55-59.

Ist  $ABC$  ein Dreieck, in welchem der Winkel  $B$  das  $(n+1)$ -fache des Winkels bei  $A$  ist, so ziehe man  $BD$  so, dass Winkel  $DBA$  dem Winkel bei  $A$  gleich wird, und hierauf  $DE$  parallel zu  $AB$ ; dann ist  $BDE$  ein Dreieck, in welchem der Winkel  $D$  gleich dem  $n$ -fachen des Winkels  $EDB$  ist. Wenn nun  $a_n, b_n, c_n$  die Seiten dieses letzteren Dreiecks, ferner  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  des erstern sind, so zeigt sich, dass

$$a_{n+1} = \frac{a_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2}; \quad b_{n+1} = \frac{c_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{c_n^2 - a_n^2};$$

$$c_{n+1} = \frac{b_n(b_n^2 + c_n^2 - a_n^2)}{b_n^2}.$$

Von diesen Formeln geht nun der Verfasser aus, um ganze Zahlen für die Seiten der in Rede stehenden Dreiecke zu finden. Zahlentheoretische Betrachtungen und die Benutzung der Gleichung

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} = 2^{n-1} \cos^{n-1} \varphi - 2^{n-3} \cdot \frac{n-2}{1} \cdot \cos^{n-3} \varphi + \dots$$

führen dann zu der Lösung

$$a_n = q^n, \quad b_n = c_{n-1} q,$$

$$c_n = p^n - \frac{n-1}{1} p^{n-2} q^2 + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} p^{n-4} q^4 + \dots,$$

wo  $p$  und  $q$  zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Die Reihe beginnt mit

$$a_1 = q, \quad b_1 = q, \quad c_1 = p.$$

Hierauf wird noch von solchen Dreiecken gesprochen, bei welchen die Seiten durch auf einander folgende Zahlen gemessen werden. Soll z. B. der eine Winkel das Doppelte eines andern im Dreieck sein, so ist bei consecutiven Zahlen 4, 5, 6 die einzige Lösung

Mz.

L. A. KITUDGE, J. O'REGAN. Solutions of a question (5951). Ed. Times XXXVII. 39-40.

Sind  $A, B, C$  die Winkel eines Dreiecks, und ist

$$\alpha = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2 \cos 2A - 1},$$

Während  $\beta$  und  $\gamma$  eine analoge Bedeutung haben, so ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha\beta\gamma.$$

Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie von E. W. SYMONS, T. R. TERRY, J. W. RUSSELL, H. L. ORCHARD, D. EDWARDES, A. COHEN, R. KNOWLES, CURTIS finden sich Ed. Times XXXVI. 120, 122-123; XXXVII. 28-29, 113-114.

Wn.

v. SCHÄWEN. Analogien zwischen dem sphärischen und dem ebenen Dreieck. Zeitschr. f. d. Realschulw. 394-401, 469-478.

Die Anzahl derjenigen Sätze aus beiden Trigonometrien, welche nicht nur dem Sinne, sondern auch dem äusseren Ansehen nach sich gegenseitig entsprechen, ist weit grösser, als man gemeiniglich annimmt, und man darf deshalb dem Verfasser Dank wissen, dass er uns mit der hier vorliegenden, umfangreichen Zusammenstellung beschenkt hat. Alle Relationen, deren Richtigkeit erst durch eine eigentliche Rechnung hätte erwiesen werden müssen, sind ausgeschlossen worden; so z. B. die Cosinussätze, denn obwohl für den Radius  $\infty$  zwischen den Gleichungen  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$  und  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  keinerlei Unterschied besteht, so leuchtet doch die Analogie nicht von vorne herein ein. Mit grosser Geschicklichkeit hat deshalb der Verfasser die einzelnen Ausdrücke so umgeformt, dass in ihnen einzig und allein Sinus und Tangenten vorkommen; ersetzt man darin  $\sin \alpha$  und  $\tan \alpha$  resp. durch den Bogen oder die Sehne  $\alpha$ , so kann man jeder Formel der Raumtrigonometrie sofort die entsprechende der ebenen Trigonometrie dualistisch zur Seite



## A. Bemerkung zur sphärischen Trigonometrie.

XI. 212-214. (Böhmisch).

Berücksichtigung einer von Dostor in Grunert Arch. veröffentlichten Abhandlung werden Formeln für

$$\cos \frac{a}{2}, \quad \sin \frac{a}{2}, \quad \cot \frac{a}{2}$$

elt, welche in der Praxis bequemer anzuwenden sind. net nämlich  $\alpha, \beta, \gamma$  sphärische Winkel,  $a, b, c$  sphärische und setzt man

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - 90^\circ,$$

It man

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\sin(\beta - \sigma) \sin(\gamma - \sigma)}{\sin \beta \sin \gamma},$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{\sin \sigma \sin(\alpha - \sigma)}{\sin \beta \sin \gamma},$$

$$\cot^2 \frac{a}{2} = \frac{\sin(\beta - \sigma) \sin(\gamma - \sigma)}{\sin \sigma \sin(\alpha - \sigma)}.$$

Std.

e Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der irischen Trigonometrie von W. H. H. HUDSON, F. L. LUCKER, CH. LADD, E. W. SYMONS, T. R. TERRY, J. C. MURPHY, B. EASTON, J. J. WALKER finden sich Times XXXVI. 44, 120; XXXVII. 82, 96.

Wn.

WALKER. Two constructions for drawing spheres touching four given spheres, and an associated theorem. (2) XII. 173-174.

Verfasser teilt zwei Lösungen der Aufgabe mit, eine zu construiren, die vier gegebene Kugeln berührt. Er dann folgenden Satz: Wenn eine Kugel drei gegebene berührt, so besteht der Ort für ihren Mittelpunkt im Allgemeinen aus acht ebenen Kegelschnitten und der Ort des Be-





gibt der Herr Verfasser einen Lehrgang, welcher die Inhaltsermittlung der Polyeder zum Gegenstande hat. Er geht dabei von den wesentlichsten Eigenschaften der Körper aus, nämlich, daß sie allseitig umgrenzt und rücksichtlich ihres Inhalts von der Anordnung ihrer Teile unabhängig sind. So wird für alle Körper dieselbe Regel der Inhaltsermittlung entwickelt, und dabei einerseits die Abstraction des Allgemeinen aus den wesentlichen Eigenschaften des Besondern, und andererseits das Subsumiren eines einzelnen Falles unter die allgemeine Regel in möglichster Weise geübt. Die allgemeine Inhaltsformel für ein Polyeder ergibt sich, wenn man dasselbe in beliebiger Richtung auf eine Grundebene, die im Allgemeinen den Körper nicht schneidet, parallel projecirt; dann ist unter jeder Fläche des Körpers ein im Allgemeinen schief abgeschnittenes Prisma, und die algebraische Summe derselben (indem nämlich ein Teil dieser Prismen positiv, der übrige negativ zu nehmen, wie die Anwendung ergibt) ist dem Inhalte des Körpers gleich. Aus dieser Grundregel wird nun in einfacher und anschaulicher Weise die Inhaltsbestimmung einer Reihe mehr und weniger bekannter Polyeder abgeleitet.

Mz.

HRMÁDKO. Berechnung des kubischen Inhalts eines schiefen Prismas ohne Anwendung der sphärischen Trigonometrie. Cas. XI. 123-137. (Böhmisch).

Std.

C. PARAIRA. Over de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de zijden van een driehoek parallelogrammen beschrijft. Nieuw Arch. IX. 87-96.

C. PARAIRA. Een stereometrisch Analogon van het theorema van Pappus. Nieuw Arch. IX. 96-97.

Untersucht wird die Figur, welche entsteht, wenn man über den Seiten eines Dreiecks Parallelogramme beschreibt, über den







**TILŠER.** Zur Einführung in die Anfangsgründe der darstellenden Geometrie. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 75-99, 123-536, 581-595, 641-661; Cas. XI. 59. (Böhmisch).

Diese Aufsätze enthalten nicht sowohl eine Methodik der descriptiven Geometrie, als vielmehr allgemeine Reflexionen zur Philosophie der Wissenschaft überhaupt, ganz im Sinne der bekannten „Ikonognosie“ des Verfassers. Dem eigentlichen Gegenstande näher tritt erst die letzte Abteilung, welche die Verwendung verschieden geformter Buchstabensymbole zur Bezeichnung verschiedenen Bestandtheile eines Raumgebildes erörtert und empfiehlt.

Gr.

**MANNHEIM.** Premiers éléments de la géométrie descriptive. Nouv. Ann. (3) I. 385-401, 433-450.

Bekanntlich wird die geometrische Natur eines Körpers durch Grundriss und Aufriss zur Darstellung gebracht. Beide Projectionen pflegen durch Zeichnung in einer Ebene entworfen und der Durchschnitt der horizontalen und der verticalen Ebene durch eine Gerade (la ligne de terre) markirt zu werden; die Geraden, welche unter der Horizontalebene und hinter der Verticalebene laufen, werden alsdann dadurch von den anderen abgehoben, dass sie in der Zeichnung punktirt werden. Herr Mannheim empfiehlt, den Durchschnitt beider Projectionsebenen willkürlich lassen und in der Zeichnung nicht als Gerade auszuwerfen, dieselbe wol für die Stellung des Körpers zu den Projectionsebenen, aber nicht für seine eigene geometrische Natur von Wichtigkeit sei. Das Punktiren der Linien kommt dadurch in Weg;

denn man kann den Körper stets in solcher Stellung zu den Projectionsebenen denken, dass alle seine Teile über der Horizontalebene und vor der Verticalebene gelegen sind. Einige Beispiele zeigen die Zweckmässigkeit, in dieser Form die Elemente der descriptiven Geometrie zu behandeln.

Schn.



**H. BEHSE.** Die darstellende Geometrie für Real-, Gewerbe- und Werkmeisterschulen, sowie zum Selbstunterricht für Bautechniker und Mechaniker. I. Teil. Die Projectionslehre. Construction der Durchschnitsfiguren. Windschiefe Flächen. Spirallinien und Spiralfächen. Vierte gänzlich umgearbeitete Aufl. Leipzig. G. Knapp. (E. Nowák).

Die wiederholten Auflagen des Buches dürften dessen Brauchbarkeit hinlänglich beweisen. Der Text ist leicht fasslich, die Figuren sind im Allgemeinen für den Zweck ausreichend. In Nr. 163, einer Abwicklung eines Cylinders, möchte bei einer künftigen Auflage eine Aenderung angebracht werden, welche die Tangenten in den Endpunkten der Abwicklungscurve gleiche Winkel mit der Horizontalen einschliessen lässt. Ebenso genügt die Zeichnung der scharfgängigen Schraube (Fig. 195) für ein Lehrbuch der darstellenden Geometrie nicht. Rg.

**A. V. PESCHKA.** Darstellende und projective Geometrie. Mit einem Atlas. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Von diesem gross angelegten Werke ist bis jetzt der erste Band „Methodik“ erschienen. Referent hat bereits in Schlömilch Z. XVIII. eine ausführliche Recension veröffentlicht, auf welche hier verwiesen werden möge.

Die folgenden Capitelüberschriften mögen den Inhalt charakterisiren.

Erster Abschnitt. Centralprojection.

I. Capitel. Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene.

II. Capitel. Projectivische Beziehungen zwischen Punkt, Gerade und Ebene.

III. Capitel. Metrische Eigenschaften (Beziehungen).

IV. Capitel. Projectivische Geometrie.

Zweiter Abschnitt. Klinographische oder schiefe Projection.

V. Capitel. Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen.





ANN. Handbuch der Linearperspective. Stuttgart.  
1.

LA. Leitfaden für den Unterricht in der dar-  
den Geometrie. Wien. Seidel u. Sohn.

ER. Die Centralprojection als Hilfsconstruction  
rthogonalprojection. Wien. Braumüller.

ARI. Applicazioni della geometria descrittiva.  
La Teoria delle ombre e del chiaro-scuro ad  
elle università, delle Scuole d'applicazione per  
gegneri etc. Fascicolo I., Fascicolo II. ed ultimo.  
Camilla e Bertolero.

Das vorliegende umfangreiche Werk ist bereits eine  
he Recension von Herrn Wiener in Schlömilch Z. (XXII.  
er die erste Lieferung und ibid. XXVI. p. 134 über die  
eferung) erschienen. Der Inhalt der einzelnen Capitel  
lgende:

#### Erster Teil.

- el I. Allgemeines.
- el II. Schatten von Punkten.
- el III. Schatten von Geraden.
- el IV. Schatten von Polygonen und Curven.
- el V. Schatten der Polyeder.
- el VI. Schatten der krummen Flächen im Allgemeinen.
- el VII. Schatten der Developpabeln.
- el VIII. Schatten der Kugel und des Ellipsoids.
- el IX. Schatten der Umdrehungskörper.
- el X. Schatten der Schraubenflächen (und Schrauben-  
hen).
- el XI. Schatten der windschiefen Flächen.

#### Zweiter Teil. Vom Helldunkel.

- el I. Allgemeines.
- el II. Tonskala und Anleitung zum Tuschen.
- el III. Helldunkel bei Polyedern.



nichtendste Anwendung der Cyklographie dient die vom Herrn Verfasser noch vielfach erweiterte Figur des Feuerbach'schen Theorems.

Als Anhang treten noch zwei Ergänzungen zum Vorigen auf: einmal wird der Dualität in der Cyklographie ihre wichtige Stelle bewiesen, sodann die Möglichkeit der Ausdehnung der ganzen Betrachtungen auf den Raum von vier Dimensionen mitgeteilt, ein Gebiet, auf dem schon Herr Veronese mit Erfolg vorgeschritten war. My.

HAUCK. Perspectivische Studien. (Nachtrag zu dem Aufsätze: „Ueber die Grundprincipien der Linearperspective“ in Schlömilch Z. XXVI. 273). Schlömilch Z. XVII. 236-248.

Die vorliegende Arbeit (s. auch F. d. M. XIII. (1881) 457) ist in vier Paragraphen:

- I. Die Abbildung von krummflächigen Objecten.
- II. Die conform perspectivische Abbildung.
- III. De la Gournerie's Restitutionstheorie.
- IV. Kritik der Restitutionstheorie.

In den beiden ersten Paragraphen vertritt der Verfasser in Uebereinstimmung mit de la Gournerie (Traité de Perspective aëro, livre V.: Théorie des effets de perspective) die Ansicht, dass die perspectivische Darstellung krummflächiger Objecte eine andere Behandlung verlange, indem hier, nicht wie bei Objecten mit geraden Kanten das Collineationsprincip, sondern das Princip der Conformität dominire. Den Beweis für die Richtigkeit dieser Ansicht findet der Verfasser in der Uebereinstimmung mit der Kunstpraxis und der Unmöglichkeit der nach den strengen Regeln der Linearperspective erhaltenen Bilder.

Letztere Wissenschaft bleibt aber auch die Erklärung dafür erforderlich, dass anerkannt gute Bilder auch von einem falschen, unrichtigen Augenpunkte nicht einmal nahe gelegenen Punkte factisch einen guten Eindruck machen. Schon de la Gournerie suchte diese Frage zu beantworten, welches räumliche System in diesem



KEUSCHLE. Die Deckelemente. Stuttgart. Metzler.

In der Orthogonalprojection fallen für einen Deckpunkt und eine Gerade die Projectionen, für eine Deckebene die Spuren zusammen. Eine Gerade, deren Spuren vereinigt liegen, nennt der Verfasser symptotische Gerade. Deckpunkte und Deckgeraden hiernach in der Halbirungsebene des zweiten (oder vierten) Quadranten, der „zweiten Medianebene“, Deckebenen und symptotische Gerade stehen senkrecht zu jener Ebene. Der Verfasser entwickelt des Weiteren aus, wie in gewisser Weise das Reciprocitätsprincip in der Orthogonalprojection zur Geltung komme, indem die räumliche Reciprocität der Gebilde sich widerspiegele in der ebenen Reciprocität der Spuren und Projectionen bei der Ebene und dem Punkte, und ferner bei der Geraden und der Ebene als sich selbst dualistisch gegenüberstehender Gebilde. Der Verfasser hat in einer in Schlömilch Z. (Bd. XXXVIII. p. 137) erschienenen Recension, auf die hier verwiesen werden möge, einige Bemerkungen gegen die Begründung dieser Beziehungen geäußert. Die Schrift bietet viel Interessantes namentlich in der Benutzung der Deckelemente in der Centralprojection, so dass sie von jedem in der darstellenden Geometrie Nahestehenden Beachtung verdient.

Rg.

FIEDLER. Geometrische Mittheilungen. III. Das Problem der Kegelquerschnitte in allgemeiner Form, nebst Bemerkungen zum Problem des Apollonius. Wolf Z. XXIV. 190-204. 1879.

FIEDLER. Geometrische Mittheilungen. IV. Neue elementare Projectionsmethoden. Wolf Z. XXIV. 205-226. 1879.

FIEDLER. Geometrische Mittheilungen. V. Ein neuer Weg zur Theorie der Kegelschnitte. Wolf Z. XXV. 217-256.

FIEDLER. Zusätzliche Bemerkungen zu „Geometrische Mittheilungen. V.“ Wolf Z. XXV. 403-409.









bestimme die Enveloppe dieser Ebenen. Dieselbe ist ein  
 Rg  
 2. Ordnung.

PETZOLD. Constructive Lösung der Aufgabe: Eine  
 Gerade zu bestimmen, die zwei durch ihre rechtwink-  
 ligen Projectionen gegebene windschiefe Gerade unter  
 vorgeschriebenen Winkeln schneidet. Schlömilch Z. XXVII.  
 252-253.

Der Inhalt erscheint genügend durch den Titel charakterisirt.  
 Rg.

DESCH. Solution of a question (5527). Educ. Times  
 XXXVI. 64-65.

Lösung der Aufgabe, die Seite desjenigen gleichseitigen  
 Dreiecks zu bestimmen, das durch orthogonale Projection eines  
 ebenen Dreiecks entsteht, oder das ein gegebenes Dreieck  
 orthogonales Projection hat. Wn.

ROUCHÉ. Sur l'intersection de l'hyperboloïde de ré-  
 volution et d'une droite. Nouv. Ann. (3) I. 97-99.

J. CARON. Sur l'intersection d'une surface de révolu-  
 tion du second ordre. Nouv. Ann. (3) I. 217-219.

LEBON. Sur l'intersection d'une droite et d'une sur-  
 face de révolution du second ordre. Nouv. Ann. (3) I.  
 219-220.

Die erste Arbeit gab Veranlassung zu den beiden anderen.  
 Während Rouché den Satz beweist: „Wenn zwei einschalige Rota-  
 tions-Hyperboloide  $H$  und  $H_1$  ihre Kehlkreise  $S$  und  $S_1$  in einer  
 Ebene  $P$  haben, so ist die Projection ihres Durchschnitts auf eine  
 $P$  parallele Ebene ein Kreis“, zeigen die beiden anderen  
 Autoren, dass dieser Satz für irgend zwei Rotationsflächen  
 jeder Ordnung mit gemeinschaftlichem Hauptkreise richtig bleibt.



**GUIÉRE.** Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore. *Nouv. Ann.* (3) I. 561-566.

Die Ringfläche wird als Enveloppe von Kugeln constanten Radius gedacht, deren Mittelpunkte auf einem Kreise liegen. Da die Kugeln sich bei der Parallelprojection immer als Kreise bilden, führt die obige Annahme zu Constructionen der gesuchten Elemente ohne Einführung von Hülfeebenen, welche die Ringebene eine specielle Lage haben. Rg.

**TESAŘ.** Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche. *Wien. Ber.* LXXXVI. 377-388.

Es handelt sich um die Bestimmung der Contour einer Orthogonalprojection der bezeichneten Fläche auf eine Ebene, welche die Schraubenaxe parallel ist. Der Verfasser bestimmt das Momentancentrum  $C$  für eine Lage  $ab$  der Flächenerzeugenden; dann der Fusspunkt  $K$  der von  $C$  auf  $ab$  gefällten Senkrechten der Fläche Berührungspunkt. Sowohl die Curve ( $K$ ) als der Ort der Momentancentra ( $C$ ) werden analytisch untersucht. Letztere Curve besitzt unendlich viele parallele Asymptoten senkrecht zur Schraubenaxe, deren Abstand von einander gleich der halben Schraubenhöhe ist.

Schliesslich wird darauf aufmerksam gemacht, dass sich mit Hilfe eines gefundenen Punktes  $K$  die Tangenten für alle der Fläche liegenden Schraubenlinien in den Punkten der zu gehörigen Erzeugenden ohne Weiteres angeben lassen.

Rg.

**MÖLLINGER.** Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen mit besonderer Berücksichtigung der stereographischen, Bonne'schen und Merkatorprojection. Für höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterrichte. Mit 50 in den Text gedruckten Figuren. Zürich. C. Schmidt.

ischen Praxis vorkommenden Projectionsmethoden. Hervor-  
 en ist ein hübscher Beweis für den Fundamentalsatz der  
 : von der stereographischen Abbildung, dass sich zwei  
 in der Copie unter dem nämlichen Winkel durchschneiden,  
 in Originale selbst. Gr.

OFMANN. Ein elementar-geometrischer Satz als Bei-  
 ag zur Theorie des stereographischen Projection.  
 blömilch Z. XVII. 383-384.

Durch Betrachtung von vier Punkten  $A, B, C, D$ , welche in einer  
 e oder im Raume (aber auf einer Kugel) liegen können,  
 t der Verfasser den Satz: „Hält man zwei Punkte  $A, B$  auf  
 i festen Kreise  $K_3$ , sowie einen ausserhalb  $K_3$  beliebig ge-  
 en Punkt  $C$  fest, legt dagegen durch einen auf der Peri-  
 e  $K_3$  beweglichen Punkt  $D$  die Kreise  $K_1$ , welcher  $D$  mit  $B$  und  $C$ ,  
 $K_2$ , welcher  $D$  mit  $A$  und  $C$  verbindet, so schliessen diese ver-  
 lichen Kreise  $K_1, K_2$  einen constanten Winkel ein.“ Mit  
 dieses Satzes wird in sehr anschaulicher Weise die be-  
 Eigenschaft der stereographischen Projection nachgewiesen,  
 jedem Kreise auf der Kugel wieder ein Kreis im Bilde  
 cht. Rg.

## Capitel 5.

### Neuere synthetische Geometrie.

#### A. Allgemeines.

NA. Elemente der projectivischen Geometrie.  
 von Trautvetter. Stuttgart. Cotta.

Werk ist bis auf einige von dem Verfasser selbst  
 Aenderungen eine Uebersetzung des italienischen  
 Es soll dazu dienen, Anfänger auf einem anregenden  
 Wege in die projective Geometrie einzuführen, und  
 th. XIV. 2.

















ches und die Behandlungsform desselben gegeben. Der Grund, warum der Verfasser nicht früher mit einer solchen Durchführung des Gedankens hervortrat, war der, dass er bis zum Erscheinen des ersten Bandes der Ausgabe von Steiner's Werken durch die Münchener Akademie annahm, es sei, ebenso wie zahlreiche Ergebnisse seiner Methode, auch die Methode selbst Steiner bekannt gewesen. Erst, als durch das Erscheinen des ersten Bandes von Steiner's Werken und durch directe Mittheilungen der Herren Schlegel, Schläfli und Weierstrass (Kiepert) constatirt war, dass im Nachlasse Steiner's keine Spuren dieser Methode zu finden waren, übernahm Herr Fiedler an die Bearbeitung dieses Buches. Ausführlich wird in der Vorrede desselben motivirt, wie der Verfasser gedrungen zu der Ansicht gelangen musste, Steiner, der die Methode der Centralprojection in den Untersuchungen über Kreise und Kugeln fortwährend angewandt hat, Steiner, der ein nun verschwundenes Buch über das Schneiden der Kreise in der Ebene, der Kugeln im Raume und der Kreise auf der Kugel hinterlassen hat, Steiner, dessen Resultate auf diesem Gebiet sich vollständig naturgemäss aus der Fiedler'schen Methode ergeben, dass auch diese Methode besessen haben. Und wenn die Geometrie der Kreise und Kugeln von Steiner's bahnbrechender Untersuchung an bis jetzt mit allen Mitteln der synthetischen und analytischen Geometrie weiter untersucht wurde, der darstellenden Geometrie bis jetzt aber nur die schliessliche Durchführung durch andere Methoden begründeten Constructionen zufiel, so hat das Fiedler'sche Buch nunmehr auch der darstellenden Geometrie ihren natürlichen Platz unter den Forschungsmethoden in der Geometrie der Kreise und Kugeln erobert, indem dasselbe zeigt, dass sie zu allen bisher erlangten Hauptresultaten führt und noch manches Neue hinzuzufügen vermag. Hier sei hier hervorgehoben, dass die Fiedler'sche Methode in der Verbindung der elementaren Anschauungen vom Kreise und der gleichseitigen Hyperbel die natürliche Parallele zu der der neueren Analysis mehr hervortretenden Gleichbedeutung der cyklischen und hyperbolischen Functionen zeigt.

Was die Form der Darstellung in dem Buche anbetrifft, so



ken, wendet der Verfasser folgende symbolische Bezeichnung an:

$$\begin{array}{c} P A \\ B Q; \end{array}$$

dies Symbol bezeichnet das Doppelverhältnis

$$\frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ} = x.$$

gleichzeitige Vertauschung zweier Paare von Buchstaben des Symbols ändert den Wert des Doppelverhältnisses nicht: die Vertauschung der Buchstaben einer Diagonale ergibt den reziproken Wert  $\frac{1}{x}$ ; die Vertauschung der Buchstaben einer Horizontalreihe giebt den complementären Wert  $1-x$ , während man durch Vertauschung der Buchstaben einer Verticalreihe das converse Verhältnis  $\frac{x}{1-x}$  erhält. Eine cyklische Vertauschung von drei Buchstaben bringt, je nach der Richtung, in der man auf dem Kreise fortgeht, die beiden übrigen Werte  $\frac{x-1}{x}$  und  $\frac{1}{1-x}$  hervor. Jn. (Wn.).

PASCH. Bemerkungen über projective Punktreihen. Schlömilch Z. XXVII. 124-125.

Enthält ein Criterium dafür, ob in zwei projectivischen Geraden erster Stufe auf demselben Träger die Doppelemente reell oder imaginär sind. Rg.

JEŘÁBEK. Construction von conjugirten und senkrechten Strahlen von projectivischen Büscheln. Cas. XI. 216. (Böhmisch).

SCHLÖMILCH. Zwei projective Sätze. Schlömilch Z. LXVII. 380-381.



itten ausgedehnt. Unter Anderem wird die Frage beantwortet, wie man zwei projectivische gerade Punktreihen mit der charakteristischen Potenz  $k^2$  auf einanderlegen muss, um eine lineare Projectivität mit  $n$ -elementigen Gruppen zu erhalten.

die Entfernung der beiden Gegenpunkte ergibt sich die Gleichung  $(p-1)^{\text{ten}}$  Grades:

$$U_p \equiv a^{p-1} + (p-2)a^{p-3}k^2 + f_{p,3}a^{p-5}k^4 + f_{p,4}a^{p-7}k^6 + \dots = 0,$$

bei zu gelten hat

$$f_{p,r} = f_{p-1,r} + f_{p-2,r-1}.$$

Folge dessen ist

$$\begin{aligned} U_2 &= a, \\ U_3 &= a^2 + k^2, \\ U_4 &= a^3 + 2ak^2, \\ U_5 &= a^4 + 3a^2k^2 + k^4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Zum Schlusse wird die cyklisch projectivische Lage ebener Systeme behandelt. Std.

SCHUBERT. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems. Pr. Hamburg.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. D.

STURM. Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften. Klein Ann. XIX. 461-487.

Reciproke oder correlative Verwandtschaft zweier Ebenen nennt man bekanntlich diejenige Verwandtschaft, bei welcher dem Punkte der einen Ebene eine Gerade in der andern Ebene entspricht, und den Punkten einer Geraden der einen Ebene die Tangenten eines Strahlbüschels entsprechen. Quadratische Verwandtschaft zweier Ebenen nennt man ferner, wie ebenso bekannt ist, diejenige Verwandtschaft, bei welcher jedem Punkte der einen Ebene ein Punkt der andern Ebene entspricht, den Punkten einer Geraden aber die Punkte eines Kegelschnitts entsprechen. Beide Verwandtschaften brachte schon Herr Keye









te sowohl durch die eine, wie durch die andere Collineation, in einer Ebene liegende Punkte conjugirt, also  $\infty^1$  doppelt-conjugirte Punkte, nämlich alle diejenigen, welche auf den Schnittgeraden der beiden Ebenen liegen. Die  $\infty^3$  Geraden, welche so den  $\infty^3$  Punkten des Raumes als die Oerter der ihnen doppelt-conjugirten Punkte zugehören, bilden einen tetraedralen Complex. An die Untersuchung der durch zwei räumliche Correlationen hervorgerufenen Gebilde schliesst sich die Betrachtung der räumlichen cubischen Punktverwandtschaft, welche der Verfasser, genau analog der Erzeugung der quadratischen Punktverwandtschaft zweier Ebenen durch zwei Correlationen, auf folgende Weise erzeugt. Man beziehe zwei Räume in drei Weisen projektiv auf einander, und ordne jedem Punkte des einen Raumes den Schnittpunkt seiner drei entsprechenden Ebenen im andern Raume zu. Den Punkten einer Geraden entspricht dann eine cubische Raumcurve, den Punkten einer Ebene eine cubische Fläche. Alle so in jedem Raume entstehenden  $\infty^3$  cubischen Gebilde haben eine gewisse Raumcurve sechster Ordnung und zehnten Ranges gemein, auf welche schon Herr Cremona aufmerksam gemacht, und mit welcher sich auch Herr Schur beschäftigt hat. Die cubische Verwandtschaft ist durch dreizehn Paare entsprechender Punkte, also durch 39 Bedingungen, bestimmt und kann durch je drei von einander unabhängige Correlationen aus dem zweistufigen linearen Systeme von Correlationen, das durch dreizehn Paare conjugirter Punkte definiert wird, erzeugt werden. Weiterhin bezieht der Verfasser einen Raum auf drei andere collinear, ordnet dann jedem Punkte die Verbindungsebene der drei entsprechenden Punkte zu, und gelangt zu einer cubischen Punkt-Ebenen-Verwandtschaft. Dabei ergibt sich z. B. eine Fläche vierter Ordnung als Ort der Punkte, welche in die ihnen entsprechenden Ebenen fallen. Schliesslich wendet sich Herr Sturm zu dem Polarsystem zurück und behandelt die schon mehrfach behandelte Bestimmung desselben aus der zugehörigen Fläche zweiten Grades, wenn drei Punkte und die ihnen zugehörigen Polarebenen gegeben sind. Dabei wird namentlich auch die von Herrn Thieme gelehrt Con-

















**RAMISCH.** Ueber sich in einem Punkte schneidende coordinirte Linien und über auf einer Geraden liegende coordinirte Punkte. Hoppe Arch. LXIX. 54-90.

Die Untersuchungen sind wesentlich kinematischen Charakters und beziehen sich im ersten Theile der Arbeit auf die Orte Schnittpunkte zweier bewegter Curven. Im zweiten Theile wird ein Punktpaar betrachtet, welches sich auf zwei Curven in regelmässiger Weise bewegt, sowie die Einhüllende ihrer Verlängerungslinie gesucht.

Die Construction der Tangenten, bez. der Berührungspunkte geschieht mit Hülfe der in der Ueberschrift angeführten coordinirten Elemente, und zwar wird definirt: Von vier in einer Ebene endenden, sich in einem Punkte  $O$  schneidenden Geraden  $a, b, c, d$  nennen wir, wenn  $a$  und  $d$  die äussern,  $b$  und  $c$  die innern Schenkel sind, sowohl die ersteren als auch die letzteren dann zu einer coordinirten Linie zu gewissen dreien ist bei der ersten der betrachteten Curven die gesuchte Tangente. Die Definition von coordinirten Punkten auf einer Geraden ist der eben citirten für Geraden analog. Mit ihrer Hülfe werden Berührungspunkte bestimmt.

Rg.

**STÉPHANOS.** Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes binaires biquadratiques.

8 M. F. Bull. X. 134-137.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben sich, projectivisch verallgemeinert, aus den Relationen zwischen den Doppelverhältnissen, welche durch einen Kegelschnitt auf einem Dreieck und dem zu ihm conjugirten bestimmt werden. Mit Hilfe des Hesse'schen Uebertragungsprincipes aber verwandelt sich diese Aufgabe in die entsprechende der binären Formen-theorie: „Gegeben sind drei quadratische Formen  $a_x^2, b_x^2, c_x^2$ , welche den Seiten des ersten Dreiecks entsprechen, sowie die













**DA PONTE HORTA.** Algumas propriedades das conicas.  
Teixeira J. IV. 65-86.

Zwei Seiten eines veränderlichen Dreiecks drehen sich um zwei gegenüberliegende Ecken eines festen Parallelogramms, während die dritte Dreiecksseite derjenigen Diagonale parallel bleibt, welche die beiden andern Ecken des Parallelogramms verbindet. Bewegen sich dabei zwei Ecken des Dreiecks auf zwei gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms, so beschreibt die dritte Ecke eine Ellipse; bewegen sich jene zwei Ecken auf gegenüberliegenden Parallelogrammseiten, so beschreibt die dritte Ecke eine Hyperbel. Diese Erzeugungsart der Kegelschnitte hatte Herr Horta bereits in einer früheren, der Akademie von Lissabon vorgelegten Arbeit behandelt. In dem vorliegenden Aufsätze werden einige Folgerungen und Constructionen mitgeteilt. Insbesondere werden die Schnittpunkte der Ellipse mit zwei von benachbarten Ecken des Parallelogramms ausgehenden Geraden bestimmt.

Tx. (Wn.).

**SCHIAPPA MONTEIRO.** Note sur la génération d'une conique au moyen du cercle ou d'une autre conique.  
Teixeira J. IV. 95-108.

Dreht sich eine Transversale um einen festen Punkt, so bilden die Radien, welche zwei feste Punkte eines Kegelschnitts mit jenen Punkten verbinden, in denen die Transversale den Kegelschnitt schneidet, zwei projective Strahlenbüschel; und der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist daher ein anderer Kegelschnitt. Lässt man ferner um jene festen Punkte zwei parallele Sehnen sich drehen, so bilden deren Enden zwei projective Punktreihen, und die Sehnen, welche entsprechende Punkte verbinden, umhüllen einen Kegelschnitt. Die auf diese erzeugten Kegelschnitte werden in vorliegender Arbeit eingehend behandelt.

Tx. (Wn.).







kte dreier collinearer Figuren auf einem Kegelschnitte, so heisst selbe „Kegelschnitt der Homologie“; und für solche drei Figuren nun eine Reihe von Sätzen mitgeteilt. W. St.

- SCHUMANN. Die Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner, nebst einigen daraus fließenden geometrischen Relationen.

Schlömilch Z. XXVII. 363-368.

Steiner hat bewiesen, dass zwei Tripel (Polardreiecke) eines Kegelschnitts in einem Kegelschnitte enthalten sind, und Chasles, ein Paar von je drei Punkten eines Kegelschnitts stets als Tripel eines Kegelschnitts aufgefasst werden kann.

Der Verfasser behandelt die Frage analytisch und findet, die Bedingung dafür, dass ein Paar von je drei Punkten Tripel eines Kegelschnitts ist, identisch ist mit der Bedingung, ein Paar von je drei Punkten in demselben Kegelschnitte enthalten ist.

Des Weiteren leitet der Verfasser einen Satz von Poncelet, ab zwar, wie er sagt, mit einem Zusatze ab; nämlich den folgenden: „Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben und einem zweiten umschrieben, so lässt sich von jedem Punkte des ersten aus ein Dreieck dem einen ein- und dem andern umzeichnen, und alle diese Dreiecke sind Tripel eines und desselben Kegelschnitts.“

Aber dieser Satz ist bekannt, vergl. z. B. Steiner-Schröter, Kegelschnitte. II. Aufl. S. 155.

Als räumliches Analogon des obigen Satzes findet der Verfasser den folgenden Satz: „Ein Paar von je drei Geraden einer Geraden-schaar des Hyperboloids bestimmt in eindeutiger Form die Umhüllung der Geraden dieser Schaar zu je dreien derart, dass eine Gruppe von je dreien mit den drei ihnen parallelen der andern Schaar ein Parallelepipeton ergibt, welches dem Hyperboloid umgeschrieben und zugleich einer mit ihm concentrischen Ellipse zweiten Grades eingeschrieben ist.“ Rg.









men mögen, sich in einem einzigen Punkte  $P_4$  schneiden, und  
 die Schnittpunkte der Seitenpaare  $S_1 S_2, S_2 S_3, S_3 S_1$ ,  
 die bez.  $P_{12}, P_{23}, P_{31}$  heissen mögen, auf einer einzigen ge-  
 raden Linie  $S_4$  liegen. Hieraus geht ferner hervor, dass auch  
 Pol von  $S_4$  in Bezug auf  $K$  sein muss. Die eben bezeichneten  
 Punkte und zehn geraden Linien bilden also eine Configu-  
 ration, welche die Eigenschaft hat, dass zehnmal drei der zehn  
 Punkte in einer der geraden Linien liegen, und auch zehnmal  
 in der zehn geraden Linien sich in einem der zehn Punkte  
 schneiden. Von dieser bekannten Configuration, welche der Re-  
 cent gern auch als Schnitt der zehn Verbindungslinien und der  
 zehn Verbindungsebenen von fünf Punkten im Raume aufgefasst  
 werden hätte, zählt der Verfasser mehrere merkwürdige Eigen-  
 schaften auf, welche theils der Configuration an sich angehören,  
 theils auch auf den Kegelschnitt  $K$  Bezug nehmen. Namentlich  
 beachtet der Verfasser die fünfzehn Verbindungsgeraden, welche  
 entstehen, wenn man jeden der zehn Punkte mit denjenigen drei  
 Punkten der Configuration verbindet, mit denen er noch nicht durch  
 eine der zehn Geraden der Configuration verbunden ist. Diese fünf-  
 zehn Verbindungsgeraden lassen sich nämlich zu fünf Dreiseiten  
 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_5$  zusammenfassen, welche u. A. die Eigenschaft  
 haben, dass je zwei von ihnen wiederum perspectiv sind. Eine  
 andere von Herrn Brill erwähnte Eigenschaft spricht aus, dass  
 sechs Osculationspunkte der sechs Kegelschnitte, welche durch  
 drei Ecken eines der fünf Dreiecke  $\Delta$  gehen und zugleich  
 den Kegelschnitt  $K$  dreipunktig berühren, zugleich Osculations-  
 punkte für die den vier andern Dreiecken  $\Delta$  umschriebenen  
 Kegelschnitte sind. Schliesslich wird angegeben, wie sich hier-  
 aus  $K$  und einem der fünf Dreiecke  $\Delta$  die übrigen linear  
 construiren lassen.

Scht.

STREISSLER. Construction der gemeinsamen Elemente  
 zweier Kegelschnitte. Hoppe Arch. LXVIII. 389-404.

Ist jeder von zwei Kegelschnitten irgendwie durch eine fünf-  
 fache Bedingung gegeben, z. B. durch fünf seiner Punkte oder







Kreise, Geradenpaare werden. Mit Hülfe desjenigen polaren Schnitts, der zu einem Kreise wird, lässt sich dann die Aufgabe, zu einem beliebigen Punkte den im Kegelschnittbüschel gehörigen Punkt aufzusuchen, sehr einfach erledigen. Den Inhalt der Abhandlung bildet die Betrachtung des Kegelschnitts, von den Mittelpunkten der Kegelschnitte des Büschels, d. h. den Polen der unendlich fernen Geraden gebildet wird.

Scht.

HOFMANN. Théorème relatif à un certain réseau de quatre sections coniques. Nouv. Ann. (3) I. 321-325.

Diese Arbeit enthält einige Sätze über vier Kegelschnitte einem gemeinsamen Brennpunkt, von welchen jeder drei von gegebenen Geraden berührt.

W. St.

Andere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte in synthetischer Behandlung von GENESE, A. McMURPHY, CH. LADD, F. BUDD, W. ROBERTS, V. J. C. SHARP, J. L. KITCHIN, CH. A. SCOTT, J. YOUNG, I. S. MEYER, K. GALE, T. WOODCOCK, W. H. LOWRY, H. F. WALKER, TOWNSEND, DROZ, A. MARTIN, B. EASTON, D. EDWARDES, R. KNOWLES finden sich Ed. Times XXXVI. 3, 78, 83; XXXVII. 22, 25, 28, 35-36, 81, 121, 122, 123.

Wn.

ZIMMERMANN. Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über Kegelschnitte und über Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Berlin. Friedländer.

Es wird eine grosse Reihe zum Teil neuer Sätze ohne Beweise mitgeteilt.

W. St.







., vergl. das vorhergehende Referat), teilt Herr Darboux folgenden Sätze über Curven  $n^{\text{ter}}$  Klasse mit, die er im Jahre in einer geometrischen Vorlesung an der Sorbonne zum Tag gebracht hat:

1) Man betrachte  $n$  feste Gerade, bezeichne auf jeder derselben einen festen Punkt und messe von ihm aus die Stücke, die eine bewegliche Gerade auf denselben abschneidet. Bezeichnen dann zwischen diesen Abschnitten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  eine lineare Relation

$$\sum x_i p_i = k,$$

enthüllt die bewegliche Gerade im Allgemeinen eine Curve  $n^{\text{ter}}$  Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur  $(n-1)$ -fachen Tangente hat. Der Satz ist umkehrbar. Für  $n = 2$  drückt er die bekannte Eigenschaft der Parabel aus.

2) Analog lässt sich die Eigenschaft der Parabel, dass drei Tangenten auf einer beweglichen vierten stets zwei Segmente in constantem Verhältnis ausschneiden, und die Umkehrung derselben sofort auf Curven  $n^{\text{ter}}$  Klasse mit  $(n-1)$ -facher Tangente unendlich verallgemeinern.

Die Sätze lassen sich durch Projection auf Curven  $n^{\text{ter}}$  Klasse beliebiger  $(n-1)$ -facher Tangente übertragen, und ebenso fortgesetzt sich deren dualistische Umkehrung auf die einfachste Weise. Dk.

DARBOUX. Sur une propriété du cercle. C. R. XCIV. 1888-1110.

Eine bewegliche Tangente eines Kreises bestimmt mit zwei anderen Tangenten Dreiecke, deren Umfang constant ist. Diese Eigenschaft veranlasst den Verfasser zur Untersuchung derjenigen Curven, deren Tangenten auf  $n$  Paaren von Geraden Dreiecke ausschneiden, für welche die Summe der Umfänge constant ist.

Die Curven sind Unicursalcuren einer gewissen, der  $m^{\text{ten}}$  Klasse, welche die unendlich ferne Gerade zur  $(m-2)$ -fachen Tangente hat. In besonderen Fällen wird jene Gerade zur  $(m-1)$ -fachen Tangente, und dann gehen die vorliegenden Curven in die vom



in jedem der  $n'$  Scheitelpunkte des Büschels  $B$ , sowie in den  $(n+1)$  gemeinsamen Elemente der auf der Involution  $\mathfrak{G}$  befindlichen conlocalen Punktreihen, welche die Schnittpunkte zweier zu einem Tangentenpaare gehörenden Tangenten einerseits und die Schnittpunkte der  $\mathfrak{G}$  mit den Curven des Büschels  $B$  andererseits bilden, einen Doppelpunkt.“

H.

**DELL.** Zur Tangentenconstruction der Astroide. Hoppe Arch. **LXVII.** 447-448.

Der Verfasser leitet für die Astroide, welche als Enveloppe einer constanten Strecke, deren Endpunkte auf zwei beliebigen Geraden sich bewegen, entsteht, auf analytischem Wege eine Construction des Berührungspunktes der Strecke mit der Astroide auf, welche auf kinematischem Wege sich unmittelbar ergibt.

W. St.

**BELLERMANN.** Ueber Rouletten, welche entstehen, wenn eine Cycloide auf einer andern rollt. Festschrift zum 50-jährigen Jubiläum der Königstädtischen Realschule zu Berlin. S. 215-240.

In seiner Schrift „Epicycloiden und Hypocycloiden“ (1867 G. Reitz'sche Buchhandlung) hat der Verfasser diese Curven als geometrischen Ort der Eckpunkte eines Parallelogramms mit unänderlichen Seiten nachgewiesen, dessen einer Eckpunkt fest während sich die beiden ihm benachbarten Ecken mit gleichem, aber von einander verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten um die feste Ecke in Kreisen bewegen. Die beiden in dem einen Punkte zusammentreffenden Seiten, d. h. also die Halbmesser der Kreise, werden „Deferenten“ genannt. Der vierte Eckpunkt wird hier passend als „Summe“ der Deferenten zu bezeichnen. Versucht wird nun diejenige Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems, bei der eine gemeine Cycloide, Epi- oder Hypocycloide auf einer festen Curve dieser drei Arten rollt,



nen.“ „Eine räumliche Configuration  $n_i$  besteht aus  $n$  Punkten  $n$  Ebenen in solcher Lage, dass auf jeder der  $n$  Ebenen  $i$  den  $n$  Punkten enthalten sind, und durch jeden der  $n$  Punkte  $i$  den  $n$  Ebenen gehen. Diese Configuration wird genauer bezeichnet durch  $(n_i, g_k)$ , wenn zu ihr noch  $g$  Gerade gehören, mit je  $k$  der  $n$  Punkte und je  $k$  der  $n$  Ebenen incident sind.“

Das Problem der Configuration verlangt nun, dass alle verschiedenen zu den Zahlen  $n$  und  $i$  gehörigen Configurationen ermittelt, und dass ihre wichtigsten Eigenschaften aufgesucht werden.

W. St.

## VICTOR. Die harmonische Configuration 24<sub>4</sub>.

Freiburg. Ber. VIII. 2.

Die Note enthält die Eigenschaften einer räumlichen Configuration von 24 Punkten, 24 Ebenen, 18 Geraden, wo ein Punkt 4 Gerade und neun Ebenen, eine Ebene drei Gerade und neun Punkte, eine Gerade vier harmonische Punkte und vier harmonische Ebenen trägt. Sie giebt damit einen Beitrag zu der Lehre der factischen Construction und dem Studium einzelner Configurationen. Giebt es sechs Quadrupel separirter Punkte, so zerfällt sich die 24<sub>4</sub> in zwei 12<sub>3</sub> (cfr. Reye Acta math. I. 97), die anders eingeschrieben sind. Die Ebenen der einen sind die Gonalebenen der anderen. Dieses schon öfter aufgetretene Nanderschachteln zweier Configurationen kann man zu einem neuen Principe machen. In 24<sub>4</sub> sind 24 Hexaeder und 24 Octaeder nachzuweisen. Je ein Oktaeder ist in ein Hexaeder eingeschrieben. Ferner sind die Verwandtschaften bemerkenswert, denen 24<sub>4</sub> sich selbst entspricht: 24 perspectivische involutorische Collineationen, neun geschaart involutorische Collineationen, zwölf Nullsysteme (mit Bewahrung jeder 12<sub>3</sub>), 24 + 9 Nullsysteme (mit Vertauschung der 12<sub>3</sub>); allgemein 1152 Collineationen und ebensoviele Correlationen. Die Kernflächen der Nullsysteme werden betrachtet. Eine sehr durchsichtige Form ist ein Würfel mit einem eingeschriebenen regulären Oktaeder.

Kr.



ten Zahlenwert, wie man auch die fünf Punkte zu vier combiniren mag.

Der absolute Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2, & x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot V_{hklm} P_n,$$

h, k, l, m, n die Zahlen von 1 bis 5 in irgend einer Reihenfolge bedeuten. Darin liegt der Satz. Rg.

THIEME. Zur Geometrie des Tetraeders. Schlömilch Z. **XVII.** 56-61.

Der Ausgangspunkt dieser Untersuchung über das Tetraeder ist die Bestimmung des Ortes derjenigen Punkte, deren orthogonale Projectionen auf die Ebenen des Tetraeders Punkte derselben Ebene sind. Dieser Ort, eine Fläche dritter Ordnung, ist von Geiser und Hankel bereits ausführlich untersucht worden.

Verfasser gelangt durch elementare Betrachtungen zu einigen Eigenschaften der Fläche und den Beziehungen besonderer Punkte derselben zu ihren Projectionen auf alle Tetraeder-Ebenen. Es ergibt sich: Errichtet man auf allen Ebenen eines Tetraeders aus ihrer Schnitte mit einer fünften Ebene senkrechte Ebenen, verbindet dann jede Tetraederecke mit dem Schnittpunkte dieser drei auf den Ebenen der Ecke senkrechten Ebenen durch eine gerade Linie, so schneiden sich diese vier Verbindungslinien in einem Punkte, dessen Projectionen auf die Ebenen des Tetraeders die Ecken eines ebenen Viereckes sind. Es giebt drei Geraden im Raume mit der Eigenschaft, dass die Projectionen ihrer Punkte auf die Ebenen eines Tetraeders die Ecken eines Trapezes sind, und drei Punkte im Raume, für welche die Projectionen die Ecken eines Parallelogramms sind. Die zu den Gegenkantenpaaren eines Tetraeders gehörigen orthogonalen Hyperboloide schneiden sich in einer Raumcurve, welche auf dem Höhenhyperboloide liegt. W. St.





ngt sind. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so giebt es un-  
 lich viele solcher Tetraeder, welche  $a_1$  und  $a_2$  zu Gegenkanten  
 en. Ist  $a_1$  gewählt, so bestimmt jeder Punkt der Kugel eine  
 gente  $a_2$  eindeutig, welche mit  $a_1$  zugleich ein derartiges  
 ieder zulässt; für jeden Punkt des Raumes aber giebt es  
 Tangenten  $a_2$  an die Kugel, welche mit  $a_1$  zugleich jene  
 Bedingung erfüllen. Ebenso giebt es in jeder Ebene zwei der-  
 artige Linien. Schn.

BRUNO. Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una  
 quadrica. Torino Atti XVII. 35-45.

Durch eine synthetische Untersuchung wird nachgewiesen,  
 an Stelle des bei Poncelet (Traité des propriétés proj. p. 78)  
 hnten Satzes, dass die Berührungspunkte eines der Fläche  
 ten Grades umschriebenen räumlichen Vierseits stets in einer  
 e liegen, der folgende treten muss.

„Die Berührungspunkte aller vierten Seiten eines um eine  
 he zweiten Grades  $F$  beschriebenen räumlichen Vierseits,  
 en drei erste Seiten dieselbe in gegebenen Punkten  $A_1, A_2, A_3$   
 uren, liegen auf den vier (reellen) Kegelschnitten, welche  
 h die Ebenen  $A_1 A_2 A_3, A_1 A_2 S, A_1 A_3 S, A_2 A_3 S$  mit  $F$  be-  
 nt werden, falls  $S$  der Pol der Ebene  $A_1 A_2 A_3$  in Bezug  
 $F$  ist.“ Referent bemerkt hierzu, dass dieser Satz einer  
 liegenden Verallgemeinerung fähig ist. V.

MARDINAAL. Zur Construction einer Oberfläche zweiter  
 Ordnung. Schlömilch Z. XXVII. 119-122.

Es wird im Anschluss an die von Chasles gegebene Con-  
 dition einer Fläche zweiter Ordnung aus neun bekannten  
 ten die Aufgabe gelöst: „Die Fläche zu construiren, wenn  
 Punkt und die Punktinvolutionen von conjugirten Punkten  
 glich der Fläche auf drei Geraden gegeben sind.“

W. St.











zeugenden der Normalenfläche durch projectivische Ebenenbündel projectirt.“

„Die Orthogonalprojectionen der vier Torsallinien einer Normalenfläche auf die Ebene des Leitkegelschnitts sind die von der Projection des Kegelscheitels aus gezogenen Normalen des Kegelschnitts.“

b) für den angezogenen Specialfall:

„Die Paare von Erzeugenden, welche sich in Punkten des Leitkegelschnittes schneiden, treffen die Doppelgerade in constanten Punkten einer Involution.“

„Die Normalenfläche besitzt vier Torsallinien, von welchen zwei immer reell sind, und zwar sind dies jene Normalen des Kegels in den Endpunkten derjenigen Axe des Leitkegelschnitts, welche gleichzeitig in der oben genannten Hauptebene liegt.“

„Die der Normalenfläche doppelt umschriebene Developpable ist von der dritten Klasse und zerfällt in ein Ebenenbündel und einen parabolischen Cylinder. Die Axe des ersteren ist die Doppelgerade; die Erzeugenden des zweiten stehen auf der Ebene des Leitkegelschnitts senkrechten Hauptebene des Kegels normal, sind mithin zu der Ebene des Leitkegelschnitts parallel.“

Da auf jeder Erzeugenden drei Punkte mit ihren Tangentenebenen, nämlich 1) der Schnittpunkt mit dem Leitkegelschnitt, 2) der Schnittpunkt mit der Doppelgeraden, 3) der unendlich ferne Punkt als gegeben betrachtet werden können, so ist da- in jedem vierten Punkt die Tangentenebene einfach constructibel.“

Den Schluss der Abhandlung bildet die Untersuchung der Normalenfläche eines Kegels längs eines Querschnittes, welcher einer Focallinie senkrecht steht. Für die Doppelcurve ergiebt sich das Resultat:

„Die horizontale Projection eines Theils der Doppelcurve ist der Kegelschnitt, welcher durch den zweiten (nicht auf der ausgetragenen Focallinie liegenden) Brennpunkt  $F$  des Leitkegelschnitts und durch den vierten harmonischen Punkt zu den beiden



























Neue Anwendungen der Methoden des Verfassers, um gleichzeitig die Involutionen und die Curven höherer Ordnung zu iren.  
Mn. (Wn.).

---

#### D. Abzählende Geometrie.

SCHUBERT. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems. Pr. Hamburg.

Bezeichnet  $x$  die Entfernung eines Punktes  $P$  der Geraden  $g$  einem festen Punkte dieser Geraden, und haben  $x', x''$  die loge Bedeutung für die Geraden  $g'$  und  $g''$ , so wird durch eine len Grössen  $x, x', x''$  lineare Relation eine Beziehung zwischen

Punkten der drei Geraden festgelegt, vermöge welcher je  $n$  Punkten, die willkürlich auf zweien der Geraden angenommen werden, im Allgemeinen ein bestimmter Punkt der dritten Geraden correspondirt. Diese Correspondenz wird als eine lineare Verwandtschaft“ bezeichnet. Da die erwähnte lineare Relation sieben Constante enthält, so hängt die trilineare Verwandtschaft von sieben Constanten ab, vorausgesetzt, dass die Geraden, die „Träger“ der Verwandtschaft, als fest gegeben angenommen werden. Wenn man auch diese Geraden beliebig Räume veränderlich denkt, so treten noch 3.4 Constanten  $n$ , so dass das Gebilde  $\Gamma$ , welches aus drei Geraden und  $r$  auf diesen liegenden trilinearen Verwandtschaft besteht, Constantenzahl 19 besitzt. Es handelt sich nun in der vor- unden Arbeit darum, die Zahl derjenigen Gebilde  $\Gamma$  zu bestimmen, welche gewissen 19-fachen Bedingungen genügen. Die Lösung dieser Aufgabe angewandten allgemeinen Methoden sind stenteils von dem Verfasser selber ausgebildet und in seinem e: „Calcul der abzählenden Geometrie“ (Leipzig. Teubner. ) ausführlich dargelegt worden. Dieselben laufen darauf is, die Anzahlen der geometrischen Gebilde, welche gegebene Bedingungen genügen, auf andere leichter zu bestimmende







Activität zweier auf zwei festen Curven gelegenen Involutionen und gelangt so mit Benutzung der obigen Formel für  $k$  in der Formel, aus welcher sich durch Specialisirung der oft auf verschiedenen Wegen bewiesene Satz von der Gleichheit des Geschlechts zweier projectiver, d. h. Punkt für Punkt eindeutig auf einander bezogener Curven ergibt. Weiterhin vertritt der Verfasser bei der Ableitung und bei der Formulirung der Sätze über Gradzahlen von Oertern, die durch die Paare entsprechender Elemente von ebenen und räumlichen Curven, oder von Linienflächen erzeugt werden. Von diesen Sätzen, welche unmittelbar aus dem Correspondenzprincip folgen, sei der folgende erwähnt: Verbindet man je zwei entsprechende Punkte zweier projectiver Involutionen, die auf zwei Curven  $n^{\text{ter}}$  und  $n'^{\text{ter}}$  Ordnung liegen, und  $(nm - \gamma)^{\text{ten}}$  bzw.  $(n'm' - \gamma')^{\text{ten}}$  Grades sind, so erhält man die  $\infty^1$  Verbindungsstrahlen einer Linienfläche vom Grade

$$n(n'm' - \gamma') + n'(nm - \gamma).$$

Essentlich behandelt der Verfasser eingehend ein Beispiel, das die eindeutige Abbildung einer gewissen Fläche auf einer Ebene in engem Zusammenhang steht. Scht.

1. E. BJÖRLING. Om algebraiska rymdkurvors singulariteter och polardeveloppabelns karakterer.

iv. Stockh. 1881. 3-26.

Die Coordinaten einer Raumcurve, deren Anfang in dem charakterisirenden Curvenpunkte liegt, und für welche die  $x, y, z$  die Richtung der Tangente, Haupt- und Binormale haben, sind als rationale Functionen eines Parameters  $\lambda$  angenommen, deren gemeinsamer Nenner nicht mit  $\lambda$  verschwindet. Sind dann  $l, m, n$  die kleinsten Potenzexponenten der Zähler, so ist stets  $l < m < n$ , im Allgemeinen  $l = 1, m = 2, n = 3$ . Jeder höhere Wert von  $l$  gibt eine Singularität. Statt der rationalen Brüche können hier auch beliebige convergente Reihen stehen, deren Anfangsglied allein massgebend ist. Es werden hiernach die Singularitäten discutirt, dann Theorien von Salmon und Cayley,





Ebene durch die vier Kanten  $AB, BC, CD, DA$  eines Fundamental-Tetraeders  $ABCD$  ausgeschnittenen Vierecks einen gleichen Punktort, dessen Gradzahl dreimal so gross ist, als der  $n$  des Ebenen-Orts, wie sich übrigens aus den Incidenzen des Raumes unmittelbar ergibt. Ebenso durchläuft die liche Ebene einen Ort vom Grade  $3n$ , sobald der genannte Polarschnittpunkt einen Ort vom Grade  $n$  durchläuft. Diese Zahlen  $3n$  werden natürlich um  $k$ , bzw.  $2k$  Einheiten vermindern wenn  $k$  Tetraeder-Ebenen oder  $k$  Tetraeder-Ecken dem ersten Orte angehören, und dieser Ort zweistufig, bzw. einstufig ist.

Scht.

ČEK. Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. C. R. XCIV. 1463-1465, 1583-1586; XCV. 1049-1051, 1117-1179.

Es giebt in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung bekannter Polartetraeder  $ABCD$ , von denen zwei Ecken  $A$  und  $B$  je einer gegebenen Geraden und die beiden andern Ecken  $C$  und  $D$  je auf einer gegebenen Ebene liegen. Hieraus ergibt sich für jeden Kenner der neueren Abzählungsmethoden unmittelbar dass wenn von jenen vier Ecken  $A, B, C, D$  die beiden Ecken  $A$  und  $B$  Raumcurven  $a^{\text{ten}}$  und  $b^{\text{ten}}$  Grades beschreiben, und die Ecken  $C$  und  $D$  eine Fläche  $c^{\text{ten}}$  Grades beschreibt, die Raumcurve  $D$  vom Grade  $4abc$  durchlaufen muss. Nachdem der Verfasser dies bewiesen hat, sieht er darin ein Mittel, um zu einer Transformation einer Raumcurve  $a^{\text{ten}}$  Grades in eine Raumcurve vom Grade  $4abc$  oder einer Fläche  $c^{\text{ten}}$  Grades in eine Fläche vom Grade  $4acd$  zu gelangen. Weiterhin discutirt der Verfasser besondere Lagen und Singularitäten der erzeugenden Geraden.

Scht.

ALLER. Ueber die Transformation einer gewundenen Curve durch sphärische Inversion. Lund Årsskrift. 1881. II.



$n = 2$ ,  $p = 0$  erhält man hieraus das von den Herren Boule und Weyr gefundene Resultat  $\pi = (a-1)(a+b-1)$ . Für  $a = 1$  ergibt sich ferner das Resultat  $\pi = p$ , also unabhängig von  $b$ , welches bekannt ist. Scht.

BOULE. Deux théorèmes relatifs aux centres des courbes algébriques. S. M. F. Bull. X. 219-220.

Im 47<sup>ten</sup> Bande des Crelle'schen Journals hat Steiner die Bestimmung der von den Mittelpunkten der centrischen  $C_3$ , welche durch sechs feste Punkte gehen, gebildeten Curve, sowie die Anzahl solcher Curven, die durch sieben Punkte gehen, bestimmt. Der Verfasser teilt ohne Beweis die Verallgemeinerung dieses Satzes für centrische Curven beliebiger Ordnung mit. Referent bemerkt, dass die Ordnung jener von den Mittelpunkten gebildeten Curve durch eine einfache Abzählung sich finden lässt, die dem zweiten Steiner'schen Satze analoge Anzahl aber nur eine obere Grenze gegeben, welche durch einen Druckfehler entstellt scheint. V.

I. LOVÉN. Om plana algebraiska kurvors rektificerbarhet. Lund Årsskrift. XVIII.

$f(x, y) = 0$  sei die Gleichung einer ebenen algebraischen Curve, ferner sei  $u^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ; durch Elimination erhalte man  $u^2 = 0$ . Der Verfasser bestimmt die Charaktere  $(M, N, D, K, T, J)$  und das Geschlecht  $(P)$  der die letzte Gleichung repräsentirenden Curve aus denjenigen  $(\mu, \nu, \delta, \dots, p)$  der ersten, der „ $f$ -Curve“. Diese ist offenbar für  $P = 0$  rectificirbar im gewöhnlichen Sinne.

Im allgemeinen Falle ist

$$\begin{aligned} M &= 2(\mu + \nu), & N + K &= 8\nu + 2\kappa, & D &= 2(\mu + \nu)^2 - 5\nu - \mu - \kappa, \\ & & P &= 2p + \nu - 1; \end{aligned}$$

In welchem Falle kann  $P$  offenbar niemals verschwinden.



mit acht beliebig gegebenen Punkten zusammen eine der neun Doppelpunkte einer Curve sechsten Grades Geschlecht 1 constituiren können, nicht die ganze Ebene, sondern eine Curve neunten Grades bilden, welche die gegebenen Punkte zu dreifachen Punkten hat. Die Abhängigkeit der neun Punkte von einander kann auf folgende Art dargestellt werden. Man sondere einen von den neun Punkten aus, esse  $A$ , und lege durch die übrigen acht alle  $\infty^1$  Curven 1 Grades, bestimme den neunten Punkt  $A'$ , den dieselben gemein haben, wähle dann die eine Curve aus, welche auch durch  $A$  hindurchgeht, und ziehe die beiden Tangenten, die diese Curve in  $A$  und  $A'$  berühren. Nur wenn der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten wiederum auf jener Curve dritten Grades liegt, haben die neun Punkte die verlangte Eigenschaft, Doppelpunkte von Curven sechsten Grades vom Geschlechte 1 sein zu können. Unter den  $\infty^1$  Curven, die dieselben neun Doppelpunkte haben, giebt es zwölf, welche noch einen zehnten Doppelpunkt besitzen. An die Beweise dieser Resultate, bei denen derselbe auch die Darstellung der Punkte einer cubischen Curve und die Argumente einer doppelt-periodischen Function benutzt, ist sich die Ableitung der analytisch-geometrischen Gleichung der gesuchten Curve sechsten Grades, sowie auch die Verallgemeinerung der Resultate auf Curven vom Grade  $3m$  mit neun Punkten.

Scht.

# **Neunter Abschnitt.**

## **Analytische Geometrie.**

### **Capitel 1.**

#### **C o o r d i n a t e n.**

H. PICQUET. Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et aux grades universitaires. Première partie. Géométrie analytique à deux dimensions. Paris. G. Masson.

Dem gesammten Inhalt zufolge ist das Vorliegende kein Lehrbuch der analytischen, sondern der synthetischen Geometrie. Das erste Buch handelt von den Coordinaten, der geraden Linien, ihren tangentiellen Coordinaten, dem Princip der Dualität und der homographischen Transformation; das zweite von den ebenen Curven, den singulären Punkten und Tangenten, Determinanten der algebraischen Curven; das dritte von den Kegelschnitten, das vierte von den Curven dritten und vierten Grades.

H.

G. VERONESE. Dei principali metodi in geometria e in special del metodo analitico. Verona. Padova. Tedeschi.

Diese Abhandlung bildet die Einleitung zu einer Vorlesung über analytische Geometrie. Der in Deutschland mathemati-

gebildete Verfasser giebt hier einen recht instructiven, historischen Ueberblick über die wesentlichsten analytisch-geometrischen Forschungsmethoden, insbesondere über die verschiedenen Coordinatensysteme und die Benutzung höherer Räume. Auf diese Frage lässt er sich um so lieber ein, als ihm hier die Mithilfe eigener fruchtbarer Untersuchungen zu Gebote stehen. In den zu erwähnenden namhaften Autoren hat der Herr Verfasser eine etwas subjectiv gefärbte Auswahl getroffen. So scheinen ihm die Leistungen eines Hesse und Grassmann besonders erwähnenswert.

My.

FIEDLER. Geometrische Mitteilungen. I. Die allgemeine Transformation der Coordinaten. Wolfz. XXIV. 145-179.

Schon im sechzehnten Bande der Wolf'schen Vierteljahrschrift hatte Herr Fiedler darauf aufmerksam gemacht, dass aus der geometrischen Deutung der Coefficienten einer linearen Substitution sich die allgemeine Coordinatentransformation ergebe. In der vorliegenden Abhandlung wird dieser Gedanke näher ausgeführt und seine Fruchtbarkeit an mehreren Beispielen gezeigt.

Zunächst wird die Transformation von einem Systeme schiefwinkliger Cartesischer Coordinaten in der Ebene zu einem andern System als Specialfall der allgemeinen Coordinatentransformation behandelt. Um dann das orthogonale Hyperboloid Object der Coordinatentransformation behandeln zu können, führt Herr Fiedler die verschiedenen Erzeugungsarten dieser reellen Fläche zweiten Grades. Steiner hatte dieselbe als Ort der Durchschnittslinien der zu einander normalen Ebenen zweier Geradenbüschel erzeugt, woraus man finden kann, dass die Gleichung derselben aus der des allgemeinen Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hinzufügung der Bedingung

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$





metrischen Relationen in allgemeinen Coordinaten als Be-  
 gen der Elementenpaare zum unendlich fernen imaginären  
 kreise. Scht.

ETTI. Sulla trasformazione delle coordinate nello  
 zio. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 252-258.

Die Richtungscosinus einer Geraden lassen sich durch drei  
 en neun Winkeln ausdrücken, welche die Axen zweier  
 inklinger Coordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung  
 nander bilden, wenn zwischen zwei aus den Cosinus jener  
 l gebildeten Determinanten Reciprocität besteht. Durch  
 ng um die Gerade lässt sich alsdann das eine System mit  
 ndern zur Deckung bringen. Die Resultate stimmen zum  
 it den von Bardelli gefundenen überein. (S. F. d. M. II.  
 0 p. 460.) Schg.

. C. SHARP, G. M. REEVES. Solution of a question  
 63). Ed. Times XXXVII. 117-118.

nd die drei Cartesischen Coordinaten eines Punktes alle  
 en linearen Functionen der entsprechenden Coordinaten  
 g vieler anderer Punkte, so ist diese Beziehung von der  
 des Coordinatensystems unabhängig; falls die Summe der  
 ienten gleich 1, ist die Beziehung auch von der Lage  
 ofangspunktes unabhängig. Wn.

AIN. Die ersten Formeln für die Rechnung mit  
 metrischen Punktcoordinaten. Hoppe Arch LXVII. 425-446.  
 isung einfachster Aufgaben durch verhältnismässig um-  
 che Formeln. Schg.

L. TANNER. On the coordinates of a plane curve  
 space. Lond., M. S. Proc. XIII. 125-148.



bleitung  $\frac{d^2 u}{d\sigma dn}$  den die Krümmung von  $dn$  ausdrücken-

erentialquotienten  $\frac{dv}{dn}$ , ist also nicht mehr vollkommen

. Dieser Umstand ist von Cauchy bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen einer elastisch gekrümmten Lamina (*Exercices de mathématiques*, 1828. p. 285-325) ausser Acht

Die Differentialquotienten von  $u$  nach  $x$  und  $y$  lassen sich durch  $\sigma$  und  $n$  einfacher ausdrücken, als durch die von Lamé in seinen „*Leçons sur les coordonnées curvilignes*“ benutzten Parameter  $\rho$  und  $\rho_1$ . Der Verfasser zeigt die Uebereinstimmung der Lamé'schen Formeln mit den seinigen und verallgemeinert die letzteren, indem er die ersteren auf den Fall einer allgemeinen Fläche ausdehnt und dann die Lamé'schen Coordinaten in seine transformirt. Endlich werden die Kirchhoff'schen Formeln für die Schwingungen einer elastischen Platte (Vorlesungen über mathematische Physik No. 30) durch Anwendung der Coordinaten  $\sigma$  und  $n$  auf eine sehr einfache und elegante Form gebracht.

Schg.

LEY. On curvilinear coordinates. Quart. J. XIX. 1-22.

In einer früheren Arbeit hatte Warren für den Fall normaler Coordinaten sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen Coefficienten und Variablen aufgestellt (siehe IX. 1877. 469). Herr Cayley erweitert diese Untersuchungen, indem er die Voraussetzung fallen lässt, dass die gegebenen Coordinaten rechtwinklige und cartesische sind, indem er ausserdem die neuen Coordinaten  $p, q, r$  als beliebige Functionen von  $x, y, z$  betrachtet. So ergeben sich sechs neue Differentialgleichungen nebst einer siebenten symmetrischen, die ebenfalls einer von Warren gegebenen entspricht. Cayley's Resultat bildet die Ableitung der von Lamé in seinen „*Leçons sur les coordonnées curvilignes*“ pp. 76, 78 gegebenen Gleichungen.

Schg.



Entfernung ihrer Mittelpunkte. Diese Definition scheint in der That zweckmässig, da sie mit den formalen Gesetzen der Multiplication, soweit dieselben hier in Betracht kommen, in Einklang ist. Da sich jede gerade Linie als Summe von zwei Geraden ansehen lässt, so ergeben sich aus den Gesetzen für Multiplication und Addition der Kreise auch die für Strecken an. Diese sind die von Grassmann in der Ausdehnungslehre entwickelten. Insbesondere wird für die Summe zweier ein „Kräftepaar“ bildenden Strecken das Symbol  $\theta$  eingeführt, für welches die formalen Gesetze  $\theta^2 = 0$ ,  $\theta C = 1$ ,  $\theta(c_1 - c_2) = 0$  in Anwendung bringen sind; der Beweis derselben ist allerdings unnötig vollständig. Dieser Algorithmus lässt sich mit Vorteil verwenden zur Untersuchung einer grossen Zahl von Problemen, von denen nur das der Ermittlung der bekannten Determinantenrelationen zwischen den Centren von vier Kreisen, die zu einem Orthogonal sind, resp. von fünf Kreisen erwähnt sein möge. Der Mehrzahl nach lassen sich die Resultate freilich unmittelbar durch das Princip der reciproken Radien aus der Theorie der Geraden gewinnen, und wenn in der Einleitung (p. 75) besonders hervorgehoben wird: „It is shown, that three circles passing through a point have properties analogous to those of an ordinary triangle“, so giebt eben jenes Princip für diese hier nur zufällig auftretende Analogie den eigentlichen Grund an.

Zum Schlusse wird mittels der obigen Operationen ein eigenartiges System von Kreiscoordinaten eingeführt und mittels derselben die Theorie der bicircularen Curve vierter Ordnung behandelt, ohne dass indessen neue Gesichtspunkte gewonnen würden.

V.

J. Cox. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Cambr. Trans. XIII 68-143; Cambr. Proc. IV. 194-196.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. p. 439.









damit vergleicht, dessen Hilfsmittel in dieser Art sich in auf ein Minimum beschränken. Besser durchdacht ist die Terminologie, nur dass wenigstens die Hälfte der eingeführten Ausdrücke vollständig überflüssig ist, was der Autor selbst zwischen den Zeilen zugesteht. (Dabei sei gleich der Verfasser ausgesprochen, dass der zweite Band das so nötige Register dieser Ausdrücke bringen möge). Diesen Mangel gegenüber verschwindet fast die Breite der Darstellung und der wenigstens in der ersten Hälfte des Bandes vorhandene Mangel an Anwendungen, welche die Mühe des Lesers lohnen. Zum Glück hat Hamilton selbst eine Vorrede mitgeteilt, in welcher er dankenswerter Weise in der Vorrede mitgeteilte Angaben dazu gegeben, welche Partien des Werkes beim ersten Durchlesen ohne Nachteil überschlagen werden können. Dennoch dürfte es für deutsche Anfänger besser auf die Eingangs genannten Punkte hinzuweisen sein, als auf das Hamilton'sche Originalwerk. Es überdies immer wieder betont werden, dass jeder Versuch, die Quaternionentheorie weiter zu vervollkommen mit Notwendigkeit auf die Ausdehnungslehre hinführt. (Wenn z. B. Résal den Ausdruck  $S\alpha\beta$  als „geometrisches Product“ von  $\alpha$  und  $\beta$  auffassen, so ist dieses Product nichts anderes als das „algebraische Product“ der Ausdehnungslehre). Soviel Aufhebens auch um die Quaternionentheorie im Auslande gemacht wird, in der That ist die Geometrie wird sie doch nur als vorübergehende Entwicklungsstufe des Calculs erscheinen, welcher in der Ausdehnungslehre seinen umfassenden und endgiltigen Abschluss und die Vollkommenste, weil sachgemässe Darstellung findet. Für die deutsche Literatur liegt daher, abgesehen vom historischen Interesse, keine Veranlassung vor, uns mit den Quaternionen beizubeschäftigen, als es sich darum handelt, fremde Arbeiten in diesem Gebiete zu verstehen. Jedenfalls aber müssen wir dem Herrn Uebersetzer dankbar sein für den grossen Aufwand an mühevoller Arbeit, womit er das Hamilton'sche Werk in Deutschland eingeführt hat. Steht doch zu hoffen, dass solche Bestrebungen allmählig die Zahl jener unglücklichen Mathematiker verringern werden, welche jede

Arbeit, in der  $ab$  nicht gleich  $ba$  ist, grundsätzlich perhorresciren. Schg.

D. PADELETTI. Principii della teoria dei quaternioni elementarmente esposti. Batt. G. XX. 1-48.

Uebersichtliche Darstellung der Elemente der Quaternionentheorie, am Schluss mit einer kurzen Zusammenstellung der Hauptbegriffe und Formeln und funfzig Uebungsaufgaben. Die Grassmann'schen Bezeichnungen und Benennungen sind zwar nicht grundsätzlich adoptirt, aber überall, wo erforderlich, gebührend hervorgehoben. Auch die Arbeiten von Bellavitis u. A. sind berücksichtigt. Schg.

G. J. MOUNIER. Eene byzondere eigenschap der quaternionen. Nieuw Arch. VIII. 81-88.

Die Bedingung wird gesucht und gefunden, welcher zwei Quaternionen genügen müssen, damit das Product Null sei, ohne dass eine von beiden Null ist. G.

C. S. PEIRCE. On the relative forms of quaternions. J. Hopkins Circ. 1882. 179.

Wenn das Symbol  $(Y:Z)$  die Vertauschung der  $Y$ -Componente eines Vectors mit seiner  $Z$ -Componente bedeutet, und  $1, i, j$  die Einheiten der Quaternionen sind, so ist

$$\begin{aligned} 1 &= (W:W) + (X:X) + (Y:Y) + (Z:Z), \\ i &= (X:W) - (W:X) - (Y:Z) + (Z:Y), \end{aligned}$$

während  $j$  und  $k$  aus  $i$  durch circulare Vertauschung von  $X, Y$  erfolgen. ( $W$  ist die vierte der homogenen Coordinaten.) Die Anwendung der Gesetze

$$(Y:Z)(Z:X) = (Y:X); \quad (Y:Z)(X:W) = 0$$

Setzt man wieder die Grundgleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ijk = -1 \text{ etc. .}$$

Mithilfe dieser Symbole lassen sich die Quaternionen selbst determinantenähnlichen Formen schreiben.

Schg.

J. WALKER. Solutions of two questions (5803, 6674).

Ed. Times XXXVII. 46-47, 57.

Bestimmung der Lage gewisser Kreise als Uebungsaufgabe  
Anwendung der Quaternionen. Wn.

GRAEFE. Einige Sätze über abwickelbare Flächen  
abgeleitet mit Hilfe von Quaternionen. Hoppe Arch.  
LXIX. 1-18.

Der Verfasser leitet zunächst eine grössere Reihe von Sätzen, welche die Krümmung der Flächen im Allgemeinen betreffen, und giebt dann eine ausführliche Theorie der abwickelbaren Flächen. Die Einfachheit der Formeln, welche aus dem Wegfall der Coordinaten resultirt, ermöglicht dem Verfasser die Lösung complicirter Aufgaben und die Aufstellung einer Reihe von Sätzen, deren allgemeinsten mit der Frage zusammenhängt: Wie beschaffen ist die Curve  $\varrho = f(u, v)$  der Fläche  $\varrho = f(u, v)$ , damit die geradlinige Fläche

$$\varrho = V(\alpha f' + \beta n + \gamma n f') + (\alpha f' + \beta n + \gamma n f') \lambda$$

eine abwickelbare Fläche ist? (wobei  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$  Functionen von  $u, v$  sind). Diese Frage gedenkt der Verfasser in einer späteren Zeit zu beantworten.

Schg.

PADELETTI. Su un calcolo nella teoria delle dinamiche analogo da quello dei quaternioni. Nap., Rend. XXI. 111-119.

Dem „Vector“ der Quaternionen, welcher eine Strecke von



$$V = \varphi(x + iy) + \psi(x - iy)$$

Gleichung  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$  vorliegt, dehnt der Verfasser griff der complexen Multiplication (welcher er wegen der tativität der Factoren den Vorzug vor den Quaternionen wie er durch Grassmann für zwei Einheiten mittels der ngen  $e_1 e_2 = e_2 e_1$ ,  $e_1 e_1 = -e_2 e_2$  festgestellt ist, auf vier en aus, giebt also den Grössen  $e_1$  und  $e_2$  neben den resp. 1 und  $i$  noch zwei Werte  $h$  und  $k$ , wobei  $k = hi$  gesetzt Eine aus den Einheiten  $1, i, h, k$  abgeleitete Grösse  $q$  er- ich dann als complanare Biquaternion im Sinne Hamilton's. der Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe enthält eit noch Berechnungen der einfachen Functionen von  $q$ . hluss bildet eine geometrische Anwendung der gewonne- sultate, aus der sich der Nutzen der complanaren Biqua- on für die Erweiterung von Resultaten der ebenen auf der räumlichen Geometrie erschen lässt.

Schg.

## Capitel 2.

### Analytische Geometrie der Ebene.

#### A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

OCKNICK. Sifferexempel till plana koordinat- netrien. Stockholm.

ie Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geo- worin den bekannten Grössen immer bestimmte numerische eigelegt sind. E.

---

ZEUTHEN. Om stationäre kurver i el System. en T. (4) VI. 5-13.



OLST. Ein Paar synthetische Methoden in der  
rischen Geometrie mit Anwendungen. Lie Arch. VII.  
162.

ese beiden Abhandlungen, unter denen die letzte im  
lichen als eine Uebersetzung der ersten aufzufassen ist,  
en nach der Auffassung des Referenten die Aufmerksam-  
er Geometer. Sie entwickeln beachtenswerte Methoden  
efern gleichzeitig hübsche Anwendungen derselben. Wir  
inken uns in diesem Referate auf die ebene Geométrie.

er Verfasser geht von einigen einfachen metrischen Be-  
ngen aus, die er zuerst in Clebsch Ann. IX. 341, 375  
F. d. M. IX. 1877. 485) und im Bull. Soc. Math. de Fr.  
62, (siehe F. d. M. XII. 1880. 553) entwickelt hat. So-

beschäftigt er sich mit dem fundamentalen Begriffe  
che Invariante“, den Referent folgendermassen definiren

. Eine Function von den Coordinaten gewisser Punkte oder  
n und von den Gleichungscoefficienten gewisser algebrai-  
Curven heisst eine metrische Invariante, wenn sie sich  
ber allen Bewegungen der Ebene als Invariante verhält.

ann sich nun die interessante Aufgabe stellen, die ein-

metrische Invariante aufzusuchen, bei deren Verschwin-  
ne gewisse projectivische (descriptive) Beziehung ausge-

wird. So z. B. ist der (doppelte) Flächeninhalt eines

als die einfachste metrische Invariante, deren Verschwinden

ekt, dass die drei Ecken auf einer Geraden liegen. An-

its ist der Flächeninhalt eines Dreiseits, dividirt durch den

esser des umgeschriebenen Kreises, die einfachste metri-

variante, durch deren Verschwinden ausgedrückt wird,

ie drei Seiten durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

entsprechend bildet der Verfasser eine metrische Invariante

ordinaten von sechs Punkten (oder Geraden), durch deren

winden ausgedrückt wird, dass dieselben einem Kegel-

: angehören. Für beliebige algebraische Curven ge-

Ordnung lassen sich ähnliche Invarianten bilden. Die-

Fälle, in denen die Entfernung zweier Punkte, der Winkel





Analytischer Beweis eines Satzes, der in der vorangehenden durch eine synthetische Methode erhalten wurde.

L.

LINDEMANN. Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini, qui touchent une courbe algébrique donnée par un contact du troisième ordre. S. M. F., Bull. K. 21-40.

Ist  $A = \sum \lambda_i \varphi_i = 0$  die Gleichung eines Gewebes von Curvester Ordnung,  $f = 0$  eine Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, so sagen die

$$\begin{aligned} A = 0, \quad dA = 0, \quad d^2A = 0, \quad d^3A = 0, \\ f = 0, \quad df = 0, \quad d^2f = 0, \quad d^3f = 0 \end{aligned}$$

dass eine dreipunktige Berührung zwischen einer Curve des ebenes mit  $f$  stattfindet. Zur Bestimmung einer Curve, welche gesuchten Berührungspunkte auf  $f$  ausschneidet, hat man aus vorstehenden Gleichungen die  $\lambda$  und die ersten, zweiten und dritten Differentiale der homogenen Variablen  $x$  zu eliminiren. vgl. F. d. M. IX. 1877. 485 und die daselbst gegebene Literatur.) Diese Resultante wird mittels symbolischer Rechnung vollständig bestimmt und liefert in Uebereinstimmung mit dem vom Verfasser bereits auf anderem Wege in den Vorlesungen Clebsch entwickelten allgemeinen Resultaten eine Curve von Ordnung  $4\left[s + \frac{3}{2}(n-3)\right]$ . Gleichzeitig ist damit eine exacte Darstellung der Formen gewonnen, welche in dem bei der Frage in Betracht kommenden Brill'schen Reciprocitätsproblem (Clebsch Ann. IV. 527, siehe F. d. M. III. 1871. 316) aufzufinden ist. Der eingeschlagene Weg kann endlich dazu dienen, auch in beliebig vielfach lineares System von Curven die exacte Darstellung der analogen Bedingungen zu liefern.

V.

J. S. VANEČEK. Sur l'inversion générale. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 29-31.

Der Verfasser betrachtet in Verbindung mit einem Kegelschnitt  $C$  zwei Curven  $L$ ,  $D$ , resp. von der Ordnung  $m$ ,  $n$ . Die inverse Curve einer derselben in Bezug auf die andere ist eine Curve von der Ordnung  $2mn$  mit  $2n$  vielfachen Punkten von der Ordnung  $m$  und  $2m$  vielfachen Punkten von der Ordnung  $n$ . Ferner findet folgender Satz statt: Wenn die eine Ecke  $\alpha$  eines Polardreiecks  $\alpha\alpha_1\alpha_2$  in Bezug auf einen Kegelschnitt  $C$  eine Curve  $L$  von der Ordnung  $m$ , die Ecke  $\alpha_1$  eine Curve  $D$  von der Ordnung  $n$  beschreibt, so bewegt sich die dritte Ecke  $\alpha_2$  auf einer Curve von der Ordnung  $2mn$  mit denselben vielfachen Punkten wie oben, und zwar sind diese vielfachen Punkte die Schnittpunkte von  $C$  mit den Curven  $D$ ,  $L$ . Cly. (Wn.)

GENESE, CH. LADD. Solutions of a question (7028). Ed. Times XXXVII. 112-113.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten einer Curve  $p^{\text{ter}}$  Klasse mit den darauf senkrechten Tangenten einer andern Curve  $q^{\text{ter}}$  Klasse ist vom Grade  $2pq$ . Wn.

C. LE PAIGE. Notiz über die  $2k$ -elementige neutrale Gruppe einer Involution  $k^{\text{ter}}$  Stufe und  $(2k+1)^{\text{ten}}$  Grade. Wien. Ber. LXXXVI. 104-105.

Der Verfasser entwickelt die Covariante, durch deren Verschwinden die  $2k$  Elemente der neutralen Gruppe gegeben werden. Scht.

C. LE PAIGE. Sur une représentation géométrique de deux transformations uniformes. Belg., Bull. (3) III. 760-761.

C. LE PAIGE. Sur quelques transformations géométriques uniformes. Belg., Bull. (3) IV. 415-431.

LIE. Rapport. Belg., Bull. (3) III. 717.

ufache geometrische Deutung einer Transformation fünfter  
echster Ordnung mit Hülfe der Curven dritter Ordnung.

Mn. (Wn.).

L. Sur le centre des moyennes distances des points  
ne courbe unicursale. S. M. F., Bull. X. 137-139.

urch einfache Betrachtungen nach der Methode der ana-  
en Geometrie gelangt der Herr Verfasser zu dem Theorem:  
Ort der Centra mittlerer Entfernungen derjenigen Punkte,  
er festen unicursalen Curve vom Grade  $\rho$  und einem System  
urven  $m^{\text{ter}}$  Ordnung, deren Gleichung einen variablen Pa-  
r im  $k^{\text{ten}}$  Grade enthält, gemeinsam sind, ist eine unicursale  
von der Ordnung  $k\rho$ , welche die asymptotischen Richtungen  
rsprünglichen unicursalen Curve auch zu asymptotischen  
ngen, und zwar eine jede in der Multiplicität  $k$  hat.“ Der  
Verfasser macht darauf aufmerksam, dass der Grad dieses  
nicht von  $m$  abhängt, ferner, dass eine grosse Zahl be-  
er Resultate in diesem Theorem enthalten ist, wobei der  
 $= 1$  hervorgehoben wird. Am Schlusse findet sich eine  
idung auf ein Polygon, das einem festen Kegelschnitt  
chrieben und einem andern festen Kegelschnitt um-  
en ist.

Mz.

ORDAN. Ueber Bündel von Kegelschnitten.

n Ann. XIX. 529-553.

he Abschn. II. Cap. 2. p. 80.

L. RUSSELL. On certain geometrical theorems.

. 2. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 35-37.

enthält Formeln zur Bestimmung des Kegelschnitts, welcher  
infpunktige, der Curve dritten Grades, welche eine neun-



vorliegende Fortsetzung einer früher besprochenen Arbeit d. M. XII. 1880. 545-546) behandelt, ebenso wie die Arbeit selbst, nach einander Homographie, Involution, anharmonisches Verhältniss. Ein weiteres Capitel ist Constructionen, die hauptsächlich auf den involutorischen Eigenschaften

Die Verfasser geben an, dass ihre Methode die von Grassmann und Schröter als specielle Fälle, resp. als Specialfälle ergebe. Die zuletzt behandelten Aufgaben sind: Wenn neun Punkte einer Curve dritter Ordnung gegeben sind, soll der Schnitt der Curve mit einer beliebigen Geraden, resp. mit einer, die durch ein oder zwei der gegebenen Punkte geht, bestimmt werden. Ferner soll, wenn neun Punkte gegeben sind, ein System von Dreiecken construirt werden, die auf die Curve conjugirt sind.

Mn. (Wn.).

PAIGE. Essai de géométrie du troisième ordre. (1883). Liège Mém. (2) X 1-104, 105-132; Belg., Bull. 85-112.

Verfasser fasst in streng systematischer Anordnung seiner bisherigen Untersuchungen über höhere Geometrie zusammen und behandelt 1) die Homographie dritter Ordnung, 2) Involution dritter Ordnung, 3) anharmonisches Verhältniss, 4) projective Eigenschaften.

Dem Zusatze beschäftigt sich der Verfasser, in Ergänzung seiner früheren Untersuchungen, mit der Construction homographischer Punktreihen und speciell mit folgender fundamentalen Aufgabe:

Wenn eine Homographie dritter Ordnung und zweiten Grades durch eine hinreichende Zahl von Bedingungen definirt ist, soll zu zwei gegebenen Elementen das zugehörige dritte Element construirt werden.

Mn. (Wn.).

PAIGE. Sur les courbes du troisième ordre. Bull. (3) IV. 334-344.



ng dafür, dass die  $3n$  entsprechenden Punkte auf einer  $C_n$ , und umgekehrt. Von diesem Theorem werden einfache Anwendungen auf Punktgruppen auf der  $C_3$  gemacht, die von Tangentialpunkten gebildet sind, von denen die folgende erwähnt sein: Die  $12n$  Berührungspunkte der von den Schnittpunkten einer  $C_n$  an die  $C_3$  gelegten Tangenten liegen zu je  $3n$  auf  $m$  irren  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, wo  $m$  die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{3n} \equiv 0 \pmod{2}$$

ist.  $= 0, 1$  ist.

V.

7. DAVIS. Note on binodal quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 242.

Die kurze Note bezieht sich auf die Parameterdarstellung elliptischen  $C_4$ , enthält jedoch nichts Neues. V.

### C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

1. STORY. On a system of conchordal conics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

2. STORY. Analytical proof of some properties of conchordal quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Conchordal nennt der Verfasser das System aller  $\infty^3$  Kegelschnitte, welche durch dieselben zwei festen Punkte gehen, die Radical-Axe zweier Kegelschnitte eines solchen Systems die Verbindungslinie ihrer beiden nicht festen Schnittpunkte, Radical-Centrum dreier Kegelschnitte eines solchen Systems den Punkt, durch welchem sich die drei Radical-Axen von immer je zwei dieser Kegelschnitte schneiden, endlich Radical-Kegelschnitt den Kegelschnitt, welcher durch die sechs Berührungspunkte der sechs Tangenten geht, die an drei conchordale Kegelschnitte von ihrem Radical-Centrum aus gezogen werden können. Die analytische





IEGAND. Analytische Geometrie. 6<sup>te</sup> Aufl. Halle.  
W. Schmidt.

Der Inhalt dieses Buches giebt die analytische Geometrie der Ebene von den Elementen an bis zu den Kegelschnitten einschliesslich. Es eignet sich sehr gut für ein erstes Studium der Wissenschaft. Ein besonderes Capitel ist betitelt: Methoden der Tangenten. In diesem ist die Tangente an eine beliebige Curve definirt und dann die Anwendung hiervon auf die Kegelschnitte gegeben. Auch ist die Quadratur der Ellipse und der Parabel gezeigt. Ueberall sind ferner passende Aufgaben eingegeben. Gegen Ende des Buches werden einige Curven höherer Ordnung mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung discutirt, wie die Cissoide u. a. m. Dann folgen einige transcendente Curven: Die logarithmische Linie, die Sinuslinie, die Cycloide. Erwähnt werden einige zur Cycloide gehörige Curven. Am Schluss sind ferner noch vermischte Aufgaben gegeben.

Mz.

HOCHHEIM. Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Leipzig. Teubner.

Von diesem Buche liegt das erste Heft vor, welches in zwei Theile zerfällt, nämlich in Aufgaben und Auflösungen. Es behandelt die gerade Linie, den Punkt und den Kreis.

Das Buch soll den Studirenden der Mathematik auf der Universität und der technischen Hochschule zur Einübung und zur Verarbeitung der analytischen Geometrie dienen, jedoch auch in seinen ersten Heften beim Unterrichte in der obersten Klasse der Realschule Verwendung finden können. Von den hier enthaltenen 558 Aufgaben mögen nur einige erwähnt werden: Bestimmung eines Polygons, Bestimmung des Winkels, den zwei Geraden einschliessen, Gleichungen höheren Grades, welchen Systeme von Geraden Linien entsprechen, Strahlenbüschel, homogene Coordinaten, involutorische Punktreihen, homogene Linienkoordinaten, Pol und Polare, Radical-Axe und Radical-Centrum,



aus durch Elimination von  $\alpha, \beta, \gamma$  die Gleichung

$$\Sigma \pm a_1^2 \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot 1 = 0$$

ist. Wenn dann der Inhalt des Dreiecks  $BCD$  mit  $A$  bezeichnet wird, der von  $CDA$  mit  $B$  u. s. w., so ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$Aa_1^2 - Bb_1^2 + Cc_1^2 - Dd_1^2 = 0.$$

Nimmt man ebenso drei andere beliebige Punkte der Ebene  $O_2, O_3$  (wie vorher  $O_1$ ) hinzu, so erhält man noch drei andere Gleichungen:

$$Aa_2^2 - Bb_2^2 + Cc_2^2 - Dd_2^2 = 0, \text{ u. s. w.}$$

Daraus folgt dann die Gleichung

$$\Sigma \pm a_1^2 b_1^2 c_1^2 d_1^2 = 0.$$

Ist man dann  $O_1$  mit  $A$ ,  $O_2$  mit  $B$ , etc. coincidiren, so erhält man die verlangte Relation. Ganz das analoge Verfahren lässt sich auf die Kugel anwenden; auch kann man in gleicher Weise Relationen unter den gegenseitigen Entfernungen von fünf Punkten einer Ebene, sechs Punkten des Raumes aufstellen.

Mz.

SYKORA. Enveloppe einer Geraden, welche zur Summe der Quadrate der Abstände von einer Anzahl von Punkten eine constante Grösse hat. Prag. Ber. 1881. 23-40.

In ausführlicher analytischer Rechnung, wobei ein Punkt durch seine Coordinaten  $(x, y)$  und eine Gerade durch ihre Coordinaten  $(u, v)$ , die der Gleichung  $ux + vy + 1 = 0$  entnommen sind, bezeichnet werden, wird die fragliche Enveloppe durch eine Gleichung zweiten Grades in Liniencoordinaten ausgedrückt; sie ist also ein Kegelschnitt. Bleiben die gegebenen Punkte dieselben, und verändert sich nur die constante Summe, so erhält man eine Reihe confocaler Kegelschnitte. Es wird nun die Construction eines solchen Kegelschnittes durchgeführt und gezeigt, wie man von  $n$  gegebenen Punkten zu  $n + 1$  solchen übergehen kann. Besonders wird nachher der Fall betrachtet, in welchem die gegebenen Punkte gleichmässig auf der Peripherie eines Kreises



**ALSTENHOLME.** Solution of a question (6446). Ed. Times  
**LXXVI.** 70-71.

Ist

$$u \equiv (a, b, c, f, g, h)(x, y, 1)^2 = 0$$

Gleichung eines Kegelschnitts in rechtwinkligen Coordinaten,  
 sind die Directrices bestimmt durch die Gleichung

$$(1) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\lambda u,$$

ist die Wurzel der Gleichung

$$(2) \quad \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab = h^2$$

Für schiefwinklige Coordinaten treten an Stelle der Gleichun-  
 (1) und (2) die folgenden:

$$(1a) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega = 4\lambda u,$$

$$(2a) \quad \lambda^2 - \lambda(a + b - 2h\cos\omega) + (ab - h^2)\sin^2\omega = 0.$$

Wn.

**DE POLIGNAC** Solution of a question (6735). Ed. Times  
**XXVI.** 93-94.

Ein ungeschlossenes Polygon sei einem Kegelschnitte ein-  
 geschrieben, einem andern umschrieben; es seien  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zwei  
 einander folgende,  $a_1$  und  $a_2$  zwei andere auf einander fol-  
 gende Seiten, in derselben Reihenfolge genommen.  $a_1$  schneide  
 $m_2$ , während  $m_1$  der Schnittpunkt von  $a_2$  mit  $\mu_1$  ist. Geht  
 , während  $\mu_1$  und  $\mu_2$  fest bleiben, dagegen für  $a_1$  und  $a_2$   
 andere und andere Seitenpaare genommen werden, die Linie  
 , durch einen festen Punkt, so berühren beide Kegelschnitte  
 einander doppelt.

Wn.

**W. GENESE.** On linear syzygetic relations between  
 the coefficients of ternary quadrics. Brit. Ass. Rep.

Die ternäre quadratische Form  $(a, b, c, f, g, h)(x, y, z)^2$  stellt  
 verschiedene Curven oder Flächen dar, je nach der Wahl des



in der oben genannten Beziehung stehen sollen, eindeutig  
stimmt. Wn.

PASCH. Bemerkungen zur Kegelschnittstheorie.

Schlömilch Z. XXVII. 122-124.

Man kennt den folgenden Satz: „Sucht man auf den Seiten  
des Dreiecks  $abc$  diejenigen Punkte  $\alpha\beta\gamma$ , welche in Bezug auf  
den Kegelschnitt jedesmal der gegenüber liegenden Ecke con-  
jugirt sind, so liegen  $\alpha\beta\gamma$  auf einer Geraden  $D$ ; zieht man durch  
die Ecken des Dreiecks diejenigen Strahlen, welche jedesmal der  
gegenüber liegenden Seite conjugirt sind, so erhält man drei  
Strahlen durch einen Punkt  $d$ , den Pol der Geraden  $D$ , (diese  
Strahlen sind die Polaren von  $\alpha\beta\gamma$ ).“ Vergl. Steiner-Schröter,  
Kegelschnitte, II. Abteilung § 31, p. 153 f., Reye, Geometrie der  
Linie, II. Aufl., I. Abteilung S. 191 f.

Vom Verfasser wird die Gleichung der Geraden  $D$  aufge-  
stellt mit Hülfe der Identität

$$(abc)f(xy) = (bcx)f(ay) + (cax)f(by) + (abx)f(cy),$$

in

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i x_k \text{ mit } a_{ik} = a_{ki}; \quad i, k = 1, 2, 3$$

$$(abc) = \sum \pm a_1 b_2 c_3, \quad (bcx) = \sum \pm b_1 c_2 x_3 \text{ u. s. w.}$$

Wenn  $f(xx) = 0$  die Gleichung des Kegelschnitts ist.  $D$  ist dann  
gestellt durch

$$\frac{(bcx)}{f(bc)} + \frac{(cax)}{f(ca)} + \frac{(abx)}{f(ab)} = 0.$$

Die Linie  $D$ , welche die Seiten  $abc$  zu einem Polvierseit ergänzt,  
in Bezug auf das Dreieck  $abc$  (aufgefasst als Curve dritter  
Ordnung) denselben Pol  $\delta$  wie der Kegelschnitt. Der Punkt  $d$ ,  
welcher mit  $abc$  ein Polviereck bildet, hat in Bezug auf das  
Dreieck  $abc$  (aufgefasst als Curve dritter Ordnung) dieselbe  
Polarlinie  $\Delta$  wie der Kegelschnitt. Rg.

MILL. De l'involution de plusieurs points sur une  
conique. Nouv. Ann. (3) I. 62-79.

Giebt man einen Kegelschnitt in der Form

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

so sind seine Coordinaten als Functionen eines Parameters  $t$  genderrmassen darstellbar:

$$x = z \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = z \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Drei Punkte auf diesem Kegelschnitt bilden eine Involution, man zur Bestimmung der ihnen entsprechenden Werte von  $t$  Gleichung hat:

$$t^3 + \lambda t^2 + (a\lambda + b)t + c\lambda + d = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt für je zwei Wurzeln  $t$  und  $t'$  selben

$$\frac{t^3 + bt + d}{t^2 + at + c} = \frac{t'^3 + bt' + d}{t'^2 + at' + c} = \lambda,$$

oder:

$$t^3 t'^3 + at t' (t+t') + c(t+t')^3 - (c+b)tt' - d(t+t') + bc - ad =$$

Die hierdurch definirten variablen Dreiecke werden jetzt in Beziehung zu andern Kegelschnitten gesetzt und auf diese Sätze über Polygone, welche Kegelschnitten ein- und umschrieben sind, gewonnen. Wir führen folgende an: I. Gegeben sei ein Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0.$$

1) Diese bilden ein allgemeines System von zwei Kegelschnitten, so dass ein dem ersten eingeschriebenes Dreieck dem zweiten umschrieben ist. Die Parameter der Scheitel genügen der Gleichung

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + \frac{\lambda}{b} = 0.$$

2) Die Verbindungslinien der Scheitel mit den Berührungspunkten ihrer Gegenseiten umhüllen die Curve

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}}.$$



Der Punkt, in dem diese drei Linien sich schneiden, besitzt einen Kegelschnitt

$$\frac{y^2}{(b+3)^2(b-1)^2} - \frac{x^2}{(b+3)^2} - \frac{z^2}{(b+1)^2} = 0.$$

Betrachtet man die drei Kegelschnitte

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{4b} + \frac{y^2}{3+2b-b^2} + \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0,$$

so sind diese das allgemeine System dreier Kegelschnitte, so in dem ersten eingeschriebenes Sechseck dem dritten umschrieben ist, und gleichzeitig die Diagonalen, mit Ausschluss der Diagonalen, den zweiten berühren.

I. Betrachtet man den Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

als drei Geraden

$$y = tx, \quad y = t'x, \quad y = t''x,$$

Parameter  $t, t', t''$  die Gleichung

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + c\lambda = 0$$

erfüllen, während zwischen  $b$  und  $c$  die Relation

$$3c^2 - 4bc^2 + 6bc - 4c - b^2 = 0$$

erfüllt ist, so sind diese Linien die Diagonalen eines mit  $\lambda$  versehenen Sechsecks, welches dem gegebenen Kegelschnitt eingeschrieben und einem andern umschrieben ist;

das Sechseck ist einem Kegelschnitt eingeschrieben, dessen Gleichung

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - z^2 = 0$$

erfüllt ist. Geraden, welche die Scheitel abwechselnd verbinden, sind Tangenten des Kegelschnittes

$$\alpha' x^2 + \beta' y^2 - z^2 = 0,$$

Parameter  $\alpha, \beta, \beta'$  den Gleichungen

$$\alpha^2 + \alpha(b+c-2) + 1-b-c+bc = 0,$$

$$\beta^2 + \beta \frac{b+c-2bc}{bc} + \frac{1-b-c+bc}{bc} = 0$$



V. SYMONS, R. KNOWLES. Solutions of a question 577). Ed. Times XXXVI. 51.

Ist einer Parabel ein Dreieck  $PQR$  so eingeschrieben, dass  $PQ$  und  $PR$  die Normalen in  $Q$  und  $R$  sind, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks auf der Axe der Parabel, und die Seite  $QR$  durch einen festen Punkt der Axe. Wn.

andere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über die Parabel in analytischer Behandlung von E. W. SYMONS, T. R. TERRY, E. RUTTER, G. F. HOPKINS, F. WALKER, A. H. CURTIS, S. MARKS, J. S. JENKINS, R. KNOWLES, WOLSTENHOLME finden sich Ed. Times XXXVI. ; XXXVII. 37-38, 56-57, 114, 116. Wn.

AMMOND, B. EASTON. Solutions of a question (6117). Ed. Times XXXVII. 111.

Ist  $e$  die Excentricität einer Ellipse, deren grosse Axe  $= 1$  und ist  $E$  die Länge des Ellipsenquadranten, so ist

$$\int_0^a \frac{eEde}{(1-e^2)(a^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi a}{2(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Der Satz wird durch einfache Transformationen eines Doppelintegrals nachgewiesen. Wn.

D. DAWSON, E. RUTTER. Solutions of a question (6759). Ed. Times XXXVII. 51.

Ist  $\rho$  der Krümmungsradius einer Ellipse,  $\psi$  der Winkel der Tangente mit der grossen Axe, so ist die Gleichung der Ellipse

$$\rho^{-\frac{2}{3}} = (ab)^{-\frac{4}{3}} \{a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi\}.$$

Die Fläche zwischen dem Ellipsenquadranten, den Axen und der Tangente ist

$$\frac{3(a^4 + b^4) + 2a^2b^2}{32ab} \pi.$$



Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über die Ellipse und Hyperbel in analytischer Behandlung von  
 OPENSHAW, G. F. WALKER, N. SARKAR, J. R. DUNN,  
 R. KNOWLES, W. J. C. SHARP, C. TAYLOR, R. W. HUGH,  
 A. L. SELBY, E. RUTTER, WOLSTENHOLME, J. H. DODD,  
 S. TEBAY, MATZ, J. O'REGAN finden sich in den  
 Jahres XXXVI. 46-47, 48, 99-100, 102, 118-120; XXXVII. 30, 36-37,  
 93-94, 118-119. Wn.

#### D. Andere specielle Curven.

STORY. Analytical proof of some properties of biquadratic  
 and quartic curves. J. Hopkins Circ. 1882. 178.  
 Abschn. IX. Cap. 2. C. p. 607.

POINCARÉ. Interprétation de l'équation caractéristique  
 des courbes. Math. II. 25-30.

werden die Gleichungen der Kegelschnitte, der Ketten-  
 Tractrix, der Cissoide, der Strophoide und der Evolute  
 besprochen. Mn. (Wn.).

BLANC. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) I.

Inflexionspunkte der Curve  $x^3 + y^3 - 3kxy + 1 = 0$  sind  
 Schnitte der Coordinatenachsen mit der Curve. Zwei  
 sind reell,  $(x, y) = (0, -1; -1, 0)$ , die übrigen sind imaginär.  
 sodann die Bedingung für das Zerfallen der Curve in  
 drei Geraden aufgesucht. O.

THEOREM OF GENNAS. On a remarkable property be-  
 longing to some cubics. Analyst IX. 108-110.



Rückkehrpunkt in der Form gewonnen:

$$F \equiv A^2C - mB^3 = 0,$$

$A, B, C$  lineare Functionen von  $x, y$ , und  $m$  eine Constante.

$O$  gehört der Rückkehrtangente,  $C = 0$  der Wendetangente,

$O$  der Geraden an, die den Rückkehrpunkt mit dem Wende-

punkt verbindet. Ein Curvenpunkt  $p$  wird dann durch einen

Parameter  $\lambda$  definiert, wobei  $A:B:C = 1:\lambda:m\lambda^3$ . Hierauf wird

gerade und die conische Polare eines Punktes  $(x_0, y_0)$ , dann

Tangente in  $\lambda$  mit dem Tangentialpunkt besprochen. Es folgt

Beziehung  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  unter den Parametern dreier auf

Geraden liegenden Curvenpunkte; die Begleiterin einer

Geraden u. s. w. Liegen sechs Curvenpunkte auf einem

Kegelschnitte, so verschwindet die Summe ihrer Parameter, und

Tangentialpunkte liegen gleichfalls auf einem Kegelschnitt. In

schöner und übersichtlicher Darstellung werden noch mannig-

faltige Sätze gegeben. Am Schlusse der Arbeit werden noch die

Normalen der Curve besprochen. Durch einen beliebigen Punkt

gehen im Allgemeinen sechs Normalen, durch den Rückkehrpunkt

gehen vier Normalen der Curve.

Mz.

DORLET. Solution d'une question de mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (3) I. 256-265.

Auf einer gegebenen ebenen Curve dritten Grades mit dem Rückkehrpunkt  $O$  betrachtet der Herr Verfasser eine Reihe von Punkten

$$\dots A_{-n}, A_{-(n-1)}, \dots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots,$$

so dass die Tangente der Curve in jedem derselben die Curve

in den folgenden Punkten trifft, und löst die Aufgaben: 1) Wenn

die Coordinaten des Punktes  $A_0$  gegeben sind, so sollen die

Coordinaten der Punkte  $A_n, A_{-n}$  gefunden und die Grenzlagen an-

gegeben werden, gegen welche sich diese Punkte hinneigen,

während der Index  $n$  in's Unendliche wächst. 2) Es soll die

Curve gefunden werden, welche die Grenzlage von  $A_{-n}$  durch-

läuft, während die ursprüngliche Curve sich so verändert, dass

der Rückkehrpunkt mit der Tangente in ihm und drei bestimmte





ARIN. Sur la droite de Simson. Math. II. 106-109, 122-127.

Sätze über Curven dritter Ordnung. Mn. (Wn.).

. C. SHARP, W. J. C. MILLER. Solutions of a question (287). Ed. Times XXXVI. 35-38.

ist von einem Dreieck eine Seite  $c$  der Grösse und Lage  
eine zweite Seite  $b$  der Grösse nach gegeben, so ist der  
für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises die Curve

$$(b+c-x)y^2 = x(x-b)(x-c),$$

in  $c$  längs der  $x$ -Axe liegt, während der Anfangspunkt der  
Koordinaten der Schnittpunkt der Seiten  $b$  und  $c$  ist. Ähnliche  
Ergebnisse gelten für die Orte der Mittelpunkte der äusseren  
Berührungskreise. Wenn der Flächeninhalt des eingeschriebenen  
Dreiecks ein Maximum ist, so ist sein Radius das Doppelte des  
Radius des dritten Dreiecksseits vom Mittelpunkt des um-  
schriebenen Kreises. Wn.

McINTOSH. Solution of a question (6745). Ed. Times  
XXXVI. 38-39.

Construirt man in einer Curve dritter Ordnung mit Doppel-  
punkt, deren Doppelpunktstangenten auf einander senkrecht stehen,  
rechtwinklige Dreiecke, so dass der Scheitel des rechten Winkels  
jedesmal im Doppelpunkte liegt, so gehen alle Hypotenusen durch  
einen festen Punkt der Curve. Für das Folium des Cartesius ist  
der Doppelpunkt der Scheitel des Blattes. Wn.

andere Aufgaben und Sätze über Curven dritter Ord-  
nung von R. A. ROBERTS, G. F. WALKER, MATZ,  
J. C. SHARP, J. L. MCKENZIE, A. MCINTOSH,  
WOODCOCK finden sich Ed. Times XXXVI. 43, 84, 88-89;  
XXXVII. 54-55. Wn.



nd  $A, B, C$  die Foci eines Cartesischen Ovals,  $O$  der drei-Focus,  $N$  die Länge des von einem Punkte  $G$  auf die Axe an Lotes, so ist

$$N^2 = \frac{AG \cdot BG \cdot CG}{OG}.$$

Wn.

**ZEUTHEN.** Om mekanisk Konstruktion af Descartes' aler ved Hjælp af Snore. Zeuthen T. (4) VI. 145-154.

ür die sogenannten Descartes'schen Ovale gilt bekanntlich elation  $df_1 + ef_2 = b$ , wo  $d, e, f$  Constanten,  $f_1$  und  $f_2$  die nungen eines Punktes der Curve von zwei Brennpunkten hnen. Zufolge dieser Eigenschaft können solche Curven s Fäden auf ähnliche Weise wie eine Ellipse construiert n, falls  $d$  und  $e$  commensurabel sind. Es giebt aber andere Fälle, wo dieses gemacht werden kann, und Des- hat schon ein solches Beispiel genannt. Wie Chasles gt hat, haben diese Curven nämlich einen dritten Brenn-, dessen Existenz sich durch elementar analytische Be- ung sofort ergibt. Der Verfasser zeigt, dass die drei hungen

$$rf_2 - qf_3 = p(a_2 - a_3),$$

$$pf_3 - rf_1 = q(a_3 - a_1),$$

$$qf_1 - pf_2 = r(a_1 - a_2),$$

,  $q, r$  Constanten,  $a_1, a_2, a_3$  die Abscissen der Brennpunkte be- n, das nämliche Oval darstellen werden. Aus diesen folgt eine Relation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 = c,$$

n zugleich  $lp + mq + nr = 0$ . Aus dieser wird ersichtlich, durch gleichzeitige Benutzung aller drei Brennpunkte eine truction durch Fäden möglich wird, sobald unter  $p, q, r$  homogene Gleichung der Geraden mit ganzen Coefficienten ht. Der Verfasser knüpft hieran die Bemerkungen, dass die hnte Construction sofort die Bestimmung der Tangenten t, und dass die mechanische Construction immer möglich



Hierauf  $k$  aus der Gleichung

$$k^2(a^2 + b^2 - \lambda) - 2ka^2b^2 + \lambda a^2b^2 = 0,$$

nimmt

$$x = \frac{X}{1 - \frac{k}{a^2}}, \quad y = \frac{Y}{1 - \frac{k}{b^2}}.$$

werden nun die Brennpunkte geometrisch bestimmt. Hierauf der Herr Verfasser zur Vektorgleichung der Fusspunkt-  
über. Die Abstände eines Curvenpunktes von  $O, F_1, F_2$   
en resp. mit  $r, r_1, r_2$  bezeichnet, und schliesslich erhält man  
Gleichung  $lr_1 + mr_2 = r$ , wo  $l$  und  $m$  Constanten.

Mz.

STENHOLME. Determination of the foci of the pedal  
a given parabola with respect to any proposed  
point, and investigation of different forms of the  
vector equation of the pedal. Lond., M. S. Proc. XIII. 77-79.

Es wird hier das Entsprechende für die Parabel, was in der  
gehenden Arbeit für die Ellipse geleistet wurde, gemacht.  
Fusspunktcurve (Pedale) einer Parabel  $y^2 = 4ax$  in Bezug  
auf einen Pol  $O$  mit den Coordinaten  $X, Y$  hat die Gleichung

$$a(y - Y)^2 + (x - X)(x^2 + y^2 - xX - yY) = 0.$$

Wird nun wieder  $p$  so bestimmt, dass die Gerade  $x + iy = p$   
Pedale berührt; dies führt auf folgende zwei Gleichungen  
in den Coordinaten  $(x, y)$  der gesuchten Brennpunkte:

$$(x - X)^2 = y^2 - 4ax; \quad (x - X)y + 2a(y - Y) = 0.$$

nimmt man  $b$  aus der Gleichung

$$Y^2 = 4b(X + b - a),$$

Hierauf  $k$  aus der Gleichung

$$b = a(1 + k)^2,$$

$$x = X + 2ak, \quad y = \frac{Y}{1 + k}.$$



MAHLER. Ueber eine Curve vierter Ordnung.

Hoppe Arch. LXVIII. 440-442.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen geht der Herr Verfasser zur Betrachtung derjenigen Curve über, die durch Eliminiren von  $u$  aus den Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0, \quad y - ux = 0$$

hergeht; diese Curve ist vierter Ordnung und hat die Gleichung

$$x^4 + y^2 x^2 - y^4 = 0.$$

wird dann ihre sehr einfache Construction gegeben; ferner ergibt, dass sie symmetrisch gegen die Coordinatenachsen läuft, zwei der  $Y$ -Axe parallele Asymptoten hat, nämlich die Tangenten des Kreises

$$x^2 + y^2 = 1$$

in einem Durchschnitten mit der  $X$ -Axe. Der Coordinatenanfang ist Rückkehrpunkt und Wendepunkt zugleich. Die von einem der vier Curvenzweige, der  $x$ -Axe und anliegenden Asymptoten eingeschlossene Fläche ist gegeben durch

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Der Krümmungsradius der Curve im Coordinatenanfang ist von der Grösse  $\frac{1}{2}$ .

Mz.

AMER. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen. Hoppe Arch. LXVIII. 18-37.

Die beiden Strecken sollen in einer Ebene liegen. Dann ist der fragliche Ort im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung, bestehend aus der unendlich fernen Geraden und einer Curve vierter Ordnung, was evident, wenn man beachtet, dass die gegebene Curve durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt wird.





**V. JENSEN.** Elementär analytisk Fremstilling af Kurver beskrevne ved en bevægelig Trestangsforbindelse.

Zeuthen T. (4) VI. 154-163.

In dem Viereck  $ABCD$  sind die Punkte  $A$  und  $D$  fest. Die Seiten  $AB = CD = a$  können sich bezw. um  $A$  und  $D$  drehen, wird der Ort des Mittelpunktes  $M$  der dritten Seite  $BC$ , dessen Länge  $2b$  ist, gesucht. Legt man das Coordinatensystem so, dass die Punkte  $A$  und  $D$  die Coordinaten  $(-c, 0)$  und  $(c, 0)$  erhalten, ergibt sich die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coordinaten u. A. in der Form

$$y^2(x^2 + y^2 + b^2 + c^2 - a^2)^2 + x^2(x^2 + y^2 + b^2 - c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2y^2.$$

diese Gleichung knüpft der Verfasser eine elementare Untersuchung der Form und Lage der Curve, ihrer Tangenten und Singularitäten und erläutert dieselbe durch Beispiele und zahlreiche Figuren.

Gm.

**HART.** On the evolute of the symmetrical bicircular quartics. Quart. J. XVIII. 382-384.

Die hier behandelte Curve vierter Ordnung entsteht, wenn man vom Mittelpunkt  $O$  eines Kegelschnittes Normalen  $OT$  auf die Tangenten desselben fällt und auf jeder Normalen zwei gleichweit vom Fusspunkte  $T$  entfernte Punkte  $P, P'$  so annimmt, dass  $OP \cdot OP' = \text{const.}$  Aus der leicht zu ermittelnden Polargleichung der Curve wird dann die Enveloppe ihrer Normalen gefunden.

V.

**CAYLEY.** Solution of a question (6766). Ed. Times XXXVI. 64.

Wn.

**WNSEND.** On the atriphthaloid and atriphthalid of Dr. Haughton. Ed. Times XXXVII. 102-108.

Eingehende Discussion der Curve, deren Gleichung in Polar-



Curve ziehen kann, welche zwei conjugirten Durchmessern eines Kegelschnitts parallel sind. Es ergiebt sich eine Parabel. O.

L. W. SYMONS, C. H. SWIFT. Solutions of a question (6431). Ed. Times XXXVI. 75-76.

Der Ort eines Punktes von der Beschaffenheit, dass die von ihm an eine gegebene Ellipse gezogenen Normalen ein harmonisches Büschel bilden, ist die Curve

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^2)^3 + 54a^2b^2c^4x^2y^2 = 0; \quad (c^2 = a^2 - b^2). \\ \text{Wn.}$$

. W. SYMONS, G. F. WALKER. Solution of a question (6395). Ed. Times XXXXI. 77-78.

Sind von einem Punkte der Evolute einer Ellipse die drei Normalen an die Ellipse gezogen, so ist der Ort für den Mittelpunkt des durch die Fusspunkte gehenden Kreises

$$4(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^2b^2(a^2 - b^2)^3x^2y^2.$$

eine der gemeinsamen Sehnen des Kreises und der Ellipse geht immer durch den Mittelpunkt der Ellipse. Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter von E. ANTHONY, C. MORGAN, J. YOUNG, E. W. SYMONS, H. HAYASH, E. RUTTER, G. F. WALKER, J. H. TURRELL, WOLSTENHOLME, GENESE, T. WOODCOCK, R. KNOWLES, W. B. GROVE, CH. LADD, W. J. C. MILLER, D. EDWARDES, G. M. REEVES, TOWNSEND, NASH, A. H. CURTIS finden sich Ed. Times XXXVI. 49, 91, 92-93, 100, 109-110, 111-113, 113-114; XXXVII. 53.

Wn.

H. RÉSAL. Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes. Nouv. Ann. (3) I. 7-15.



alle Berührungspunkten liegenden Bogens immer der nämliche  
alle Curven mit gleichem Umfange. Gm.

---

HABICH. Sur les roulettes. Math. II. 145-148.

Rollt eine ebene Curve  $A$  auf einer Geraden  $D$ , und beschreibt dabei ein mit  $A$  fest verbundener Punkt  $m$  die Curve  $C$ , beschreibt  $m$ , wenn die Fusspunktcurve von  $A$  in Bezug auf  $m$  auf der Curve  $C$  rollt, die Gerade  $D$ . Die Steiner'schen Sätze über Flächeninhalt und Bogenlänge von Rollcurven ergeben sich aus obigem Satze. Mn. (Wn.).

---

M. JEFFERY. On a tangential property of regular hypocycloids and epicycloids. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 105. Cly.

---

H. M. JEFFERY. On the rectifiable spherical epicycloid or involute of a small circle. Brit. Ass. Rep. 1882. Csy.

---

MINCHIN. Solution of a question (6892). Ed. Times XXXVII. 44-45. Wn.

---

V. WOOD. Solution of a problem. Analyst IX. 60.

Diejenige Curve, bei der die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, der Bogenlänge proportional ist, ist die Kettenlinie. (Bekannt). Jn. (Wn.).

---

CÉSARO. Sur la tractrice. Math. II. 217-219.

Es wird eine gewisse Dualität zwischen der Tractrix und der logarithmischen Spirale abgeleitet. Mn. (Wn.).

---

E. W. SYMONS, HAMMOND. Solution of a question (6583).  
Ed. Times XXXVI. 54.

Die Gleichung

$$\left( \frac{1+p^2}{q} \frac{d}{dx} \right)^n \cdot \frac{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}{q} = 0$$

stellt diejenige Curve dar, deren  $(n-1)^{\text{te}}$  Evolute ein Kreis ist.  
Wn.

W. H. BESANT. Solution of a question (6253). Ed. Times  
XXXVI. 63. Wn.

Lösungen weiterer Aufgaben über transcendente Curven  
von W. J. C. SHARP, C. MORGAN, D. EDWARDS finden  
sich Ed. Times XXXVI. 67-68, 107.

Wn.

### Capitel 3.

#### Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

TH. CRAIG. On certain metrical properties of surfaces.  
Sylv., Am. J. IV. 297-320.

Fläche in einem Raume von  $n+1$  Dimensionen wird die durch eine Gleichung zwischen  $n+1$  Coordinaten  $x$  beschränkte Mannigfaltigkeit genannt. Die  $x$  sind als orthogonal aufgefasst; sie werden zur Bestimmung der Fläche als Functionen von  $n$  Parametern  $u$  ausgedrückt, dann die Grundformeln entwickelt, das Linienelement und das Flächenelement in den Parametern dargestellt. Mit der Fläche  $S$  wird eine andere Fläche  $\Sigma$  in Verbindung gebracht, deren Coordinaten  $y$  gegebene Functionen

$x$  sind. Der Quotient der zwei Flächenelemente für gleiche Werthen der Parameter wird durch eine Determinante dargestellt, deren Elemente die partiellen Differentialquotienten der  $x$  nach den  $u$  und die Richtungscosinus der Normalen beider Flächen sind, ein Resultat, welches für drei Dimensionen ohne Beweis von Neumann aufgestellt sein soll. Substituirt man den die Richtungscosinus der Normale von  $S$ , so geht  $\Sigma$  in die sogenannte Einheitskugel,  $d\Sigma:dS$  in das Krümmungsmass von  $S$  über. Letzteres wird in der Form ausgedrückt  $V':V^{n+2}$  in einfachster Analogie mit dem Gauss'schen Ausdruck für  $n=2$ . Hier ist  $V$  bestimmt durch  $dS = V du_1 du_2 \dots du_n$ , ausserdem wird  $V^2$  durch die Determinante  $n^{\text{ten}}$  Grades von den Coefficienten der Producte der  $du$  in der Entwicklung des Quadrats des Linienelements, d. i. von den  $n^2$  Fundamentalgrössen erster Ordnung ausgedrückt. Setzt man für letztere die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung im Gauss'schen Sinne, so geht  $V$  in  $V'$  über. Die Gleichung, deren Wurzeln die Hauptkrümmungsradien  $\rho$  sind, ist die Determinante von  $E'_{ik}\rho - E_{ik}V$  gleich Null gesetzt, wo  $E_{ik}$ ,  $E'_{ik}$  die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung bezeichnen. Hieraus folgt leicht das Product der Hauptkrümmungen als Krümmungsmass und die Summe der Radien, die Null gesetzt, die Minimalfläche bedingt. Es werden noch einige Relationen an drei Dimensionen entwickelt und auf  $n$  Dimensionen angewandt, die indes nicht einfach genug zur Wiedergabe sind. Dann wendet sich der Verfasser zu den Curven und bestimmt das osculirende „ $k$ -flat“ (lineares Geode von  $k$  Dimensionen), welches sich leicht durch Elimination der Coefficienten zwischen den linearen Gleichungen ergibt, welche den Durchgang des  $k$ -flats durch consecutive Curvenpunkte bedingen.

H.

**J. CRAIG.** Note on areas of corresponding surfaces.  
**J. Hopkins** Circ. 1882. 209-210.

Das Verhältniss zweier correspondirender Flächenelemente wird mittels einfacher Determinantenumformung als vierreihige





**MANSION.** Principe fondamental relatif au contact de deux surfaces qui ont une génératrice commune.

Belg., Bull. (3) III. 753-760.

**CATALAN.** Rapport. Belg., Bull. (3) III. 716-717.

Zwei Flächen, die durch eine beliebig gegebene Curve erzeugt werden und deren Gleichungen  $(n+1)$  Parameter enthalten, haben eine Berührung  $k^{\text{ter}}$  Ordnung in allen Punkten einer gemeinsamen erzeugenden Curve, wenn sie diese Eigenschaft in Punkten jener gemeinsamen Erzeugenden haben.

Mn. (Wn.).

**LIE.** Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. Lie Arch. VII. 179-193.

Eine continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen  $x_1, \dots, x_n$  mit  $r$  Parametern enthält (Gött. Nachr. 1874. siehe F. d. M. VI. 1874. 93)  $r$  infinitesimale Transformationen

$$A_k f = X_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche paarweise in der Beziehung  $(A_i A_k) = \sum c_{ik} A_s$  stehen. Soll nun eine Function  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  (oder eine Gleichung  $\varphi = 0$ ) diese Gruppe gestatten, so ist das gleichzeitige Bestehen der Relationen

$$A_1 \varphi = 0, \dots, A_r \varphi = 0$$

nothwendig und hinreichend (Clebsch Ann. XI. p. 535. s. F. d. M. 1877. 261), so dass  $\varphi$  eine arbiträre Function von  $r$  unabhängigen Lösungen unseres vollständigen Systems bezeichnet, vorausgesetzt, dass man von singulären Lösungen absieht. Wünscht man andererseits alle Functionen  $\varphi$ , die eine in der Gruppe enthaltene Untergruppe gestatten, so bestimmt man zunächst durch algebraische Operationen (Lie Arch. I. s. F. d. M. III. 1876. 212) alle in der Gruppe enthaltenen Untergruppen und verfährt sodann nach den soeben angegebenen Regeln. Diese schon früher vom Verfasser entwickelte Theorie wird in der vorliegenden Note für einen speciellen Fall im Detail durch-



ung durch Translation einer Curve ( $k$ ) gestatten. Die vor-  
 le Note erledigt die schwierige Frage nach allen Flächen,  
 mehr als zwei Weisen durch Translation einer Curve er-  
 werden können. Dieses Problem ist deswegen bemerkens-  
 weil es einen überraschenden Zusammenhang mit der all-  
 en Theorie der algebraischen ebenen Curven (Kegel) vierter  
 g darbietet. Gestattet nämlich eine Fläche nicht allein  
 tionserzeugungen durch zwei Curven  $c_1$  und  $k_1$ , sondern  
 derartige Erzeugungen durch zwei weitere Curven  
 $k_2$ , so befriedigen die Tangenten dieser vier Raumcurven  
 eine gemeinsame algebraische Relation vierten Grades

$$F_4\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

abei kann  $F_4$  eine beliebige irreductible oder reductible  
 Function vierten Ordnung von zwei Argumenten bezeichnen.  
 man die in  $F_4$  eingehenden arbiträren Constanten in be-  
 er Weise, und zwar so, dass  $F_4 = 0$  entweder eine irre-  
 e Relation darstellt oder in eine Gleichung dritten Grades  
 ne ersten Grades zerfällt, so giebt es immer eine ganz be-  
 e transcendente Fläche, die unserer Wahl entspricht. Zer-  
 $= 0$  in zwei irreductible Gleichungen zweiten Grades, so  
 s zwei zugehörige Flächen; die eine entspricht der An-  
 dass  $c_1$  und  $c_2$  die eine Gleichung,  $k_1$  und  $k_2$  die zweite  
 ; die zweite Fläche entspricht der Annahme, dass  $c_1$  und  $k_1$   
 $c_2$  und  $k_2$  die zweite Gleichung erfüllen. Dieser letzte  
 ll liefert die von Scherk (Crelle XIII. 185) entdeckte Mini-  
 ie mit  $\infty^1$  Translationserzeugungen zusammen mit ihren  
 vischen Verallgemeinerungen und Ausartungen. L.

. Sur une propriété des surfaces gauches.

II. 82-85.

alytischer Beweis des Satzes von Hachette.

Mn. (Wn.).







ichtung

$$R = \frac{\pm d_1 \varphi}{\left( \left( a \frac{\varphi}{x} + b \frac{\varphi}{y} + c \frac{\varphi}{z} \right) \right)^2}$$

iz analog ist.

Nachdem der Verfasser die eben genannte Formel auf die Doppelpunkte der Fresnel'schen Wellenfläche angewandt, untersucht er weiter die Bedingungen dafür, dass der betrachtete singuläre Punkt ein conischer Nabelpunkt (ombilic conique) d. h. dass 1) der Tangentenkegel ein Rotationskegel sei, die durch die verschiedenen Erzeugenden des Kegels gelegten Kreise dieselbe Krümmung haben. Die erste dieser Bedingungen erfordert, dass

$$\frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{zx} \frac{\varphi^2}{xy}}{\frac{\varphi^2}{yz}} = \frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{xy} \frac{\varphi^2}{yz}}{\frac{\varphi^2}{zx}} = \frac{\varphi^2}{z^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{yz} \frac{\varphi^2}{zx}}{\frac{\varphi^2}{xy}}$$

Zum Ausdruck für die zweite Bedingung gelangt der Verfasser auf genau demselben Wege, auf dem er in der früheren Zeit die sphärischen (d. h. gewöhnlichen) Nabelpunkte bestimmte, die bisher von allen Autoren allein in Betracht gezogen wurden. Nur ist das frühere Verfahren hier auf höhere Differentialquotienten, resp. auf Terme von höherer Ordnung anzuwenden. Die Charakteristische der Ableitung besteht in einer Ausdehnung der berühmten Lagrange'schen Methode der Multiplikatoren, die gewöhnlich als nur auf lineare Gleichungen anwendbar anseht, auf nicht lineare Gleichungen. So gelangt der Verfasser zu einer in Anbetracht der scheinbaren Complication der Formeln merkwürdigen Leichtigkeit zur Bestimmung der Coordinaten des conischen Nabelpunktes, sowie der Grösse seines Krümmungsradius  $R$ . Die Resultate, die ganz analog den früheren Bezug auf sphärische Nabelpunkte sind, sind in folgenden acht symmetrischen Verhältnissen, oder um zu addiren in sieben völlig symmetrischen Gleichungen enthalten:





in einem Schlussparagraphen giebt der Verfasser Anwendungen von ihm abgeleiteten Formeln auf einige Beispiele, die h zur Prüfung der Richtigkeit der Formeln dienen. Er wählte zu dem Zwecke drei einfache Fälle derart aus, dass man an der Richtigkeit der für diese Fälle durch die obigen gegebenen Formeln auch a priori, oder wenigstens durch Rechnungen, die von jener Theorie unabhängig sind, leicht sehen kann. Um eine Idee von dieser Art der Bestätigungen, genügt es, das letzte Beispiel anzuführen. Dasselbe ist die Fläche dritter Ordnung

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{m(x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\mu zx + 2\nu xy)}{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\delta yz + 2\varepsilon zx + 2\eta xy},$$

Gleichung neun unbestimmte Constanten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta, \lambda, \mu, \nu$ , während  $m$  ein gegebener linearer Parameter ist. Der Verfasser ist auf dies Beispiel durch die Ueberlegung geführt, dass die Coordinaten jedes einzelnen conischen Nabelpunktes die Gleichungen genügen müssen, nämlich den obigen mit (1), (2) bezeichneten Gleichungen; dass also, nach Elimination der Coordinaten, noch neun Bedingungsgleichungen für die in der Gleichung enthaltenen Coefficienten übrig bleiben. Die Aufgabe ist nun, in der Fläche (4) die unbestimmten Constanten zu bestimmen, dass die Fläche wenigstens einen conischen Nabelpunkt besitzt. Die Gleichungen (2) und (3) führen auf die Bedingungen

$$\alpha = \beta = \gamma = g, \quad \delta = \varepsilon = \eta = h, \quad \lambda = \mu = \nu = k;$$

Wenn diese Werte der Constanten hat die Fläche (4) einen conischen Nabelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten, welche man auch den Grössen  $g, h, k$  beilegen mag. Der Krümmungsradius für alle ebenen Schnitte, die durch den Nabelpunkt gehen, hat nach der letzten Gleichung (3) den Wert

$$(6) \quad R = m \frac{k^{\frac{1}{2}}(1 + 2k)^{\frac{1}{2}}}{gk - h}.$$

Die Richtigkeit dieses Resultats aber kann man sehr leicht direct zeigen. Denn mit Benutzung von (5) kann man die Gleichung



stimmt, ein Ausdruck, der, wenn man die Richtungscosinus der Normale

$$\xi_\beta = N^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta}$$

führt, übergeht in

$$(4) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sum d\xi dx}{\sum dx^2}.$$

Bestimmung der Maxima und Minima, also der Hauptkrümmungen, dienen, wie der Verfasser früher nachgewiesen, die Gleichungen:

$$d\xi_\beta - \frac{1}{\varrho} dx_\beta = 0,$$

aus nach Elimination der  $dx_\beta$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\varrho}, & \dots, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_2}, & \dots, & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} - \frac{1}{\varrho} \end{vmatrix} = 0.$$

Der von  $\frac{1}{\varrho}$  freie Term, d. i. die Functionaldeterminante, drückt daher das Product der Hauptkrümmungen aus. Setzt man

$$\xi_\beta = \nu_\beta \xi_n,$$

lässt sich der Zähler in (4) in doppelter Weise transformiren:

$$(19) \quad \begin{cases} \sum d\xi dx = \xi_n \sum' d\nu dx = \xi_n \sum'_\alpha \sum'_\beta \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta \\ \quad \quad \quad = \xi_n \sum'_\alpha \sum'_\beta \frac{\partial x_\alpha}{\partial \nu_\beta} d\nu_\alpha d\nu_\beta. \end{cases}$$

Es wird nun gesetzt:

$$(16) \quad \xi_n^{-2} \sum dx^2 = \sum'_\alpha (\sum'_\beta P_{\alpha\beta} d\nu_\beta)^2,$$

$$(17) \quad \frac{1}{\xi_n} \sum'_\alpha \sum'_\beta \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta = \sum'_\alpha \left[ \frac{1}{\varrho_\alpha} (\sum'_\beta P_{\alpha\beta} d\nu_\beta)^2 \right].$$

Die Möglichkeit erhellt aus der Bestimmung der  $P$ . Betrachtet







gen, und zwar direct aus der ersten hergeleitet als Ort des Coincidenzpunktes der Tangenten, welche nicht bloß mit  $u$  variiren. Es ergibt sich, dass ein Coincidenzpunkt, ausser für  $\partial v = 0$ , bei Variation in conjugirter Richtung mit dieser stattfindet, bestimmt durch

$$(IX) \quad E_1 du + F_1 dv = 0,$$

$$E_1 = p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \dots; \quad F_1 = p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + \dots$$

.. Richtungscosinus der Normale sind, und die  $u$  längs den Krümmungslinien variiren. Die Linien (IX) sind es dann, welchen die erste Schaar Krümmungslinien auf  $P$  entspricht. Für die Strecke der Tangente bis zur zweiten Mittelpunktsfläche  $M_2$  wird der Abstand gefunden:

$$e_0 = e_1 - e_2 = \frac{2\sqrt{e_1} t_1^2}{f_1 \frac{\partial e_1}{\partial v} - e_1 \frac{\partial g_1}{\partial u}}, \quad (t_1^2 = e_1 g_1 - f_1^2).$$

man also auf  $M_1$  ein System sich in conjugirten Richtungen schneidender Curven, dessen eine Schaar Kürzeste sind, so entspricht ihm auf  $M_2$  ein eben solches System, wo die andere Schaar Kürzeste sind, und auf  $P$  das System der Krümmungslinien. Auf  $P$  werden die Fundamentalgrößen der Flächen  $P$  und  $M_2$  sogleich dargestellt unter Annahme orthogonal geodätischer Metrik auf  $M_1$ .

Krümmungsverwandtschaft nennt der Verfasser Flächen  $P, P'$ , die entsprechenden Punkten in beiden Hauptkrümmungen beider Flächen übereinstimmen, und bei denen mindestens ein System von Krümmungslinien der einen Fläche einem solchen System der anderen entspricht. Dieselbe ist im Allgemeinen unsymmetrisch oder einseitig. Entsprechen sich aber beide Systeme von Krümmungslinien, so heisst die Krümmungsverwandtschaft symmetrisch oder vollkommen. Auf einseitig krümmungsverwandte Flächen kommt man durch jede Deformation von  $M_1$  in  $M'_1$ , wo  $e'_1 = 1, f'_1 = 0; t'_1 = t_1 V$  wird. Dieser Bedingung entspricht Biegung, zu welcher aber noch eine Dehnung hinzutreten





zeitig gerade, hier sind die  $P$  Rotationsflächen, mithin auch  $P'$ . Schliesslich werden die Rotationsflächen nach der dazugehörigen Vereinfachung besonders behandelt. H.

HOPPE. Nachtrag zur Flächentheorie. Hoppe Arch. LXVIII. 39-40.

Der Nachtrag schliesst sich an den § 27 der Flächentheorie Herrn Verfassers an (s. auch Grunert Arch. LIX. 262, s. M. VIII. 1876. 479); es werden in ihm folgende Sätze bewiesen:

1) Die orthogonalen Trajectorien derjenigen Kürzesten auf der Mittelpunktsfläche, welche einer Schaar von Krümmungslinien der Urfläche entsprechen, entsprechen den Curven constanter Hauptkrümmung auf der Urfläche. 2) Den zwei Hauptkrümmungsrichtungen auf der Urfläche entsprechen conjugate Richtungen auf jeder der beiden Mittelpunktsflächen.

A.

HOPPE. Ueber das Minimum des Winkels zwischen zwei conjugirten Tangenten auf positiv gekrümmter Fläche. Hoppe Arch. LXIX. 19-30.

Ist das Quadrat des Linienelementes, dargestellt in den beiden Parametern  $u, v$ ,

$$ds^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2;$$

$p, q, r$  die Richtungscosinus der Normale, und ist

$$= p \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \dots; \quad F = p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \dots, \quad G = p \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \dots,$$

$$P = Ge + 2Ff + Eg; \quad Q = EG - F^2,$$

sind die beiden Werte von  $\frac{dv}{du} = k$ , welche den charakteristischen Richtungen entsprechen, die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(I) \quad (GP - 2gQ)k^2 + 2(FP - 2fQ)k + (EP - 2eQ) = 0.$$



$$x^2 = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{d} (u - a^2)(v - a^2),$$

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{d} (u - b^2)(v - b^2),$$

$$z^2 = \frac{c^2(b^2 - a^2)}{d} (u - c^2)(v - c^2),$$

$$d = (b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)$$

Die Differentialgleichung der Curven wird

$$\frac{du}{\sqrt{(u - a^2)(u - b^2)(u - c^2)}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{(v - a^2)(v - b^2)(v - c^2)}}.$$

Ähnlich ist die Gleichung beim zweischaligen Hyperboloid. Bei einem elliptischen Hyperboloid kommt man auf niedrigere Transcendenten. A.

WEINGARTEN. Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Berl. Ber. 1882. 153-156.

Verschiebung im Sinne dieses Aufsatzes ist eine solche ohne Streckdehnung, die jedoch auch Biegung zulässt. Ferner ist zur Klarheit zu bemerken, dass die geodätischen Dreiecke nur specielle Vertreter beliebiger Flächenstücke auftreten. Die Untersuchung beginnt mit der Verschiebung unendlich kleiner Dreiecke und benutzt den von Gauss gegebenen Ausdruck der Differenz eines Dreieckswinkels auf der Fläche und des Winkels eines ebenen Dreieck von gleichen Seiten:

$$A - A^0 = \frac{1}{12} \sigma^0 (2\alpha + \beta + \gamma),$$

$\sigma^0$  den Inhalt des ebenen Dreiecks,  $\alpha, \beta, \gamma$  die Flächenkrümmungen in den Eckpunkten bezeichnen. Hieraus folgt sofort bei Anwendung auf alle drei Winkel, dass  $\alpha, \beta, \gamma$  bei Verschiebung

ihre Werte behalten müssen. Ein unendlich kleines Dreieck kann sich also nur so verschieben, dass seine Ecken auf Linien constanten Krümmungsmasses vorrücken, und wenn die Bahn eines Eckpunktes beliebig sein soll, so muss die Fläche selbst







ler Curvenformen schliesst sich an die Schnitte der Curven mit einem festen Bogen an. Es wird gefragt, ob eine in einem Schnittpunkte beginnende Halbcharakteristik, ohne vorher einen Knoten gebildet zu haben, den Bogen zum zweitenmal und öfter schneidet; der zweite heisst dann der „Conséquent“. Dagegen werden die Doppelpunkte, in denen Berührung stattfindet, nicht als Endpunkte, wie die Knoten, sondern als Verzweigungspunkte betrachtet, so dass ihnen zwei Conséquents nachfolgen können. Es werden viele Sätze über den Curvengang bewiesen, die jedoch nur im Zusammenhang Bedeutung haben. Es folgt die Theorie der Grenzykel, dann Beispiele, dann die Untersuchung der Cykel ohne Berührung und Beispiele.

H.

H. CRAIG. A geometrical theorem. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Der Verfasser stellt ohne Beweis den Satz auf: „Zieht man parallel allen Hauptnormalen einer geschlossenen Curve im Raume vom Mittelpunkte einer Kugel Radien, so teilt die Curve der Endpunkte die Oberfläche in zwei gleiche Teile.“ Dieser Satz ist jedoch nicht ohne Einschränkung richtig. Stetigkeit der Urvurve bis auf die zweite Ordnung muss zunächst vorausgesetzt werden, damit die sphärische Curve überhaupt Teile der Kugeloberfläche begrenzen kann. Letztere wird dann unter Umständen in mehr als zwei Teile geteilt. Aber auch wenn es nur zwei sind, können sie jedes beliebige rationale Verhältnis haben. Fügt man hingegen die Bedingung hinzu, dass die sphärische Curve keine Doppelpunkte habe, so gilt der Satz ohne Ausnahme.

H.

J. A. CHRISTENSEN. Vindskjæve Kurvers Polarflade og Evoluter. Zeuthen T. (4) VI. 17-19.

Zusammenstellung einiger Sätze über Polarflächen und Evoluten windschiefer Curven.

Gm.





**Raumcurven** von constanter Krümmung und Torsion, 3) über  
**solche** Raumcurven, bei denen Krümmungs- und Torsionsradius  
 constantem Verhältniss stehen. Glr. (Wn.).

## B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

**CAYLEY.** Determination of the order of a surface.  
 Mess. (2) XII. 29-32.

Eine Ebene  $OBC$  und eine fest mit derselben verbundene  
 Linie  $OA$  mögen um den Punkt  $O$  rotiren; eine variable Ebene,  
 die durch einen festen Punkt  $\omega$  geht, möge  $OA$  in  $A$  und die  
 Ebene  $OBC$  in  $BC$  schneiden. Beschreibt dann  $BC$  eine Regel-  
 curve von der Ordnung  $n$ , so beschreibt der Punkt  $A$  eine Fläche  
 von der Ordnung  $4n$ . Dieser Satz, dessen Beweis hier mitge-  
 theilt wird, ist eine Erweiterung von Newton's organischer Con-  
 struction von Curven. Der Satz wurde zuerst von Herrn C.  
 Cayley in seiner „Introduction to the geometry of conics“ (1881)  
 aufgestellt, während die Bestimmung der Ordnungszahl der  
 Flächen von Herrn Cayley herrührt. Glr. (Wn.).

**N. L. TANNER, CH. LADD.** Solution of a question (6998).  
 Ed. Times XXXVII. 91.

Entwicklung der Bedingungen dafür, dass eine gegebene  
 Linie auf einer Fläche  $n^{\text{ter}}$  Ordnung liegt. Wn.

**M. NÖTHER.** Zur Grundlegung der Theorie der alge-  
 braischen Raumcurven. Kronecker J. XCIII. 271-318.

Diese Abhandlung bildet einen Auszug aus der in den Ab-  
 handlungen der königlich preussischen Akademie der Wissen-  
 schaften zu Berlin 1883 erschienenen Arbeit von Nöther. Zu



II. Kann man durch  $h - \frac{i}{2}(i+1)$  Doppelpunkte der Projectionscurve eine adjungirte Curve  $m-i-3$  legen; wenn  $-i-3 \geq \frac{m-1}{2}$ , so geht dieselbe auch durch die übrigen  $(i+1)$  Doppelpunkte.

III. Sei

$m-i - \frac{1}{6}(i+1)(i+2)(i+3) + 1 + k$ , wo  $k = 0, 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$ ,

n kann. Stellen dann die  $h$  Doppelpunkte der ebenen Curve für die adjungirten Curven  $(m-i-3)^{\text{ter}}$  Ordnung mehr als

$-\frac{1}{6}i(i+1)(i+2) + k$  lineare Bedingungen dar, so liegt die

Restcurve auf wenigstens  $\infty^k$  Flächen  $i^{\text{ter}}$  Ordnung.

Durch eine beliebige eindeutige Transformation der Raumcurven in ebene Curven findet der Verfasser noch den Satz: Die Constantenzahl der Gesamtheit aller Raumcurven von der Ordnung  $m$  und dem Geschlecht  $p$  ist

$= 4m$  für  $m \geq \frac{3}{4}(p+4)$ ,

gegen  $\geq 4m$  für  $m < \frac{3}{4}(p+4)$ .

Der zweite Teil stellt zunächst für ebene Curven den Satz auf: Soll auf einer ebenen Curve  $f_\mu$  von der Ordnung  $\mu$  und  $\alpha$  vielfache Punkte die Gruppe  $G_{\alpha\mu-\beta}$  ( $0 \leq \beta < \mu$ ) von  $\mu-\beta$  Punkten derart sein, dass unter Berücksichtigung von  $\alpha$  möglichst viele Curven von jeder beliebigen Ordnung  $\geq \alpha$  hindurch gehen, so ist notwendig und genügend, dass  $G_{\alpha\mu-\beta}$  eine auf einer Geraden liegende Gruppe von  $\beta$  Punkten zum Rest hat.

Dieser Satz wird dann auf Flächen übertragen und lautet dann: Die Raumcurven  $m^{\text{ter}}$  Ordnung, welche auf einer Fläche  $\mu^{\text{ter}}$  Ordnung liegen sollen und das grösstmögliche Geschlecht  $\pi$  haben, müssen eine ebene Restcurve besitzen. Und zwar ist

$$\pi = \frac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2) + \frac{1}{2}(\alpha\mu - 2\beta), \quad (\mu + \alpha - 4),$$

wenn die Ordnung der Restcurve  $\beta$  und die Ordnung der Fläche,







**MILL.** Sur des polygones dont les côtés sont tangents à une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe. S. M. F. Bull. X. 127-131.

Auf einer unicursalen Curve  $m^{\text{ten}}$  Grades werden die Punkte durch die Werte eines Parameters  $t$  ausgedrückt; und es wird durch einfache analytische Betrachtungen das Theorem bewiesen: Zieht man in einem Punkte  $t$  einer unicursalen Curve  $m^{\text{ten}}$  Grades eine Tangente, welche die Curve in den Punkten  $T_1, \dots, T_{m-2}$  schneidet, und ist die Gleichung, aus welcher  $T_1, \dots, T_{m-2}$  als Function von  $t$  gefunden wird, also  $f(T, t) = 0$ , so treffen sich die Tangenten, die die Curve in den Punkten  $T_1, T_2, \dots$  hat, paarweise in Punkten  $B$ , welche ebenfalls auf der Curve liegen; die Tangenten, welche die Curve in den  $B$  hat, treffen sich zu dreien in Punkten  $C$  der Curve, u. s. w. Wenn man ferner von einem Punkte einer solchen Curve an dieselbe Tangenten zieht, so liegen deren Berührungspunkte paarweise auf je einer Curventangente, die Berührungspunkte dieser letzteren Tangente zu dreien wieder auf Curventangenten, u. s. w. Der Herr Verfasser betrachtet dann im Besonderen Curven von der Gleichung

$$\alpha^m - \beta^p \gamma^{m-p} = 0,$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma$  drei lineare Functionen bezeichnen. Nachher wird eine Raumcurve betrachtet, welche die Gleichungen

$$x = t^p, \quad y = t^q, \quad z = t^r$$

erfüllt; construirt man in einem Punkt dieser Curve die Schmiegungsebene, welche die Curve in Punkten  $T$  trifft, so ist die Gleichung zwischen  $t$  und  $T$  homogen; die Schmiegungsebenen, welche die Curve in den Punkten  $T$  hat, bilden ein Polyeder, dessen Kanten die Curven treffen; construirt man weiter in diesen Schnittpunkten an die Curve die Schmiegungsebenen, so treffen sie sich zu dreien wieder auf der Curve u. s. w. Die Gleichung

für  $\frac{T}{t}$  lautet hier:





für beliebige, also im allgemeinen schiefwinklige Koordinaten. Die Methode der Untersuchung ist etwa folgende.

Die Gleichung (I) hat nur reelle Wurzeln; denn, wäre eine Wurzel gleich  $S = u + iv$ , so wäre

$$\varphi - S\sigma = \varphi - u\sigma - iv\sigma = (P + iQ)R.$$

man  $x, y, z$  von Null verschieden, so dass  $P \neq 0, Q \neq 0$ , so dass  $v\sigma \neq 0$  sein;  $\sigma$  ist nicht Null, also muss die Constante  $R$  Null sein.

Zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (I) geben für  $\sigma$  zwei Zerlegungen von verschiedenem Charakter, wobei die Charaktere unterschieden werden:

$$P^2 + Q^2, P^2 - Q^2, -P^2 - Q^2, P^2, -Q^2, 0,$$

wobei der vierte als specieller Fall im ersten und zweiten, der fünfte als specieller Fall im zweiten und dritten, der sechste endlich in allen vorhergehenden enthalten ist. Sind  $S$  und  $S'$  zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (I) und  $S > S'$ , so kann nicht gleichzeitig sein:

$$\begin{aligned}\varphi - S\sigma &= P^2 + Q^2, \\ \varphi - S'\sigma &= P'^2 + Q'^2;\end{aligned}$$

sonst wäre

$$(S' - S)\sigma = P^2 + Q^2 - P'^2 - Q'^2;$$

was unmöglich, da die linke Seite stets positiv ist, ausser für  $x = y = z = 0$ , die rechte aber negativ wird, wenn  $P = 0, Q \neq 0$ , aber nicht  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

Der gleichen Art lassen sich auch die übrigen Teile der Behauptung beweisen.

Sind nun die drei Wurzeln der Gleichung (I) verschieden, und ist

$$S < S' < S'',$$

so sieht sich leicht, dass

$$\begin{aligned}\varphi - S\sigma &= P^2 + Q^2, \\ \varphi - S'\sigma &= P'^2 - Q'^2, \\ \varphi - S''\sigma &= -P''^2 - Q''^2,\end{aligned}$$







die Axe der  $x'$  bildet mit den ursprünglichen Axen die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$ , wo

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= a + b \cos \nu + c \cos \mu, \\ \cos \beta &= a \cos \beta + b + c \cos \lambda, \\ \cos \gamma &= a \cos \mu + b \cos \lambda + c, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Der Winkel, den die Richtungen  $a, b, c$  und  $a', b', c'$  mit einander bilden, ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned}\cos V &= (aa' + bb' + cc') + (bc' + b'c) \cos \lambda \\ &+ (ca' + a'c) \cos \mu + (ab' + a'b) \cos \nu.\end{aligned}$$

Jenige Ebene, welche conjugirt ist zu den Geraden, deren Richtung bestimmt ist durch

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

parallel zu der Ebene:

$$a + B''b + B'c)x + (B''a + A'b + Bc)y + (B'a + Bb + A''c)z = 0,$$

ann die Coefficienten der Gleichung der Fläche  $f = 0$  wie in der vorigen Arbeit bezeichnet werden. Sollen jene Geraden auf der conjugirten Ebene lotrecht stehen, so müssen die Coefficienten der Gleichung der Ebene den Cosinus der drei Winkel proportional sein, welche die Gerade mit den drei Axen bildet, also:

$$\begin{aligned}A a + B''b + B' c &= S(a + b \cos \nu + c \cos \mu), \\ B''a + A' b + B c &= S(a \cos \nu + b + c \cos \lambda), \\ B' a + B b + A'' c &= S(a \cos \mu + b \cos \lambda + c)\end{aligned}$$

oder

$$(II) \quad \begin{cases} (A-S)a + (B''-S \cos \nu)b + (B'-S \cos \mu)c = 0. \\ (B''-S \cos \nu)a + (A'-S)b + (B-S \cos \lambda)c = 0. \\ (B'-S \cos \mu)a + (B-S \cos \lambda)b + (A'-S)c = 0. \end{cases}$$

da nicht zugleich  $a = 0, b = 0, c = 0$  sein kann, führt die Elimination von  $a, b, c$  wieder auf die Gleichung

$$\Delta(S) = 0$$

der vorigen Arbeit, woran nun die weiteren Folgerungen leicht knüpft werden. Namentlich zeigt sich, dass eine einfache Wurzel der Gleichung in  $S$  eine bestimmte Hauptrichtung ergiebt; die doppelte Wurzel dagegen ergiebt unzählig viele Hauptrichtungen, welche sämmtlich einer Ebene parallel sind. (Rotations-



traeders, ebenso  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  die Coordinaten eines Punktes  $P_0$  z., und ist  $P_0 P = r$ , so ist

$$r^2 = a^2(\beta - \beta_0)(\gamma_0 - \gamma) + b^2(\alpha - \alpha_0)(\gamma_0 - \gamma) + c^2(\alpha - \alpha_0)(\beta_0 - \beta) \\ + c'^2(\gamma_0 - \gamma)(\delta - \delta_0) + b''(\beta_0 - \beta)(\delta - \delta_0) + a''(\alpha_0 - \alpha)(\delta - \delta_0)$$

und

$$(\alpha - \alpha_0) + (\beta - \beta_0) + (\gamma - \gamma_0) + (\delta - \delta_0) = 0.$$

Es dann

$$\frac{\alpha - \alpha_0}{\lambda} = \frac{\beta - \beta_0}{\mu} = \frac{\gamma - \gamma_0}{\nu} = \frac{\delta - \delta_0}{\varrho} = r$$

die Gleichung einer Geraden, so ist

$$\lambda + \mu + \nu + \varrho = 0$$

und

$$a^2\mu\nu + b^2\nu\lambda + c^2\lambda\mu + a''\lambda\varrho + b''\mu\varrho + c''\nu\varrho = 1.$$

Man sei

$$u_{1,1}\alpha^2 + u_{2,2}\beta^2 + u_{3,3}\gamma^2 + u_{4,4}\delta^2 + 2u_{1,2}\alpha\beta + \dots = \varphi(\alpha\beta\gamma\delta) = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung,  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  ihr Mittelpunkt,  $r$  ein Halbmesser, welcher zur Richtung  $\lambda\mu\nu\varrho$  gehört, dann ist

$$r^2 = - \frac{\varphi(\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0)}{\varphi(\lambda,\mu,\nu,\varrho)}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\delta_0},$$

und die Bedingung, dass  $r^2$  ein Maximum oder Minimum werde, kommt darauf hinaus, dass  $\varphi(\lambda\mu\nu\varrho)$  ein Minimum, resp. Maximum werde. Hieraus leitet der Verfasser die Gleichung ab:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & , & u_{1,2} + \frac{c^2\varphi}{2} & , & u_{1,3} + \frac{b^2\varphi}{2} & , & u_{1,4} + \frac{a'^2\varphi}{2} & , & 1 \\ u_{1,2} + \frac{c^2\varphi}{2} & , & u_{2,2} & , & u_{2,3} + \frac{a^2\varphi}{2} & , & u_{2,4} + \frac{b''\varphi}{2} & , & 1 \\ u_{1,3} + \frac{b^2\varphi}{2} & , & u_{2,3} + \frac{a^2\varphi}{2} & , & u_{3,3} & , & u_{3,4} + \frac{c'^2\varphi}{2} & , & 1 \\ u_{1,4} + \frac{a'^2\varphi}{2} & , & u_{2,4} + \frac{b''\varphi}{2} & , & u_{3,4} + \frac{c'^2\varphi}{2} & , & u_{4,4} & , & 1 \\ 1 & , & 1 & , & 1 & , & 1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung für  $\varphi = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \varrho)$ ; die entsprechenden Werte von  $r$  sind dann die Quadrate der Halbaxen,





so das Coordinatentetraeder demselben conjugirt, so ist das  
 nen des Ellipsoids

$$8\pi V \cdot \frac{\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3},$$

,  $\beta, \gamma, \delta$ , die Coordinaten des Centrums sind, also

$$u_{1,1}\alpha = u_{2,2}\beta = u_{3,3}\gamma = u_{4,4}\delta,$$

$V$  das Tetraedervolumen bedeutet.

Demnach ist der Ort der Centra aller Ellipsoide, welche  
 Coordinatentetraeder conjugirt sind und constantes Volumen  
 $n$ , bestimmt durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha\beta\gamma\delta = \lambda(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^4,$$

$\lambda$  eine Constante bedeutet.

A.

WALKER, CH. LADD. Solutions of a question (6601).

3. Times XXXVI. 25-26.

Eine Fläche zweiten Grades  $u = 0$  ist ihre eigene reciproke  
 re in Bezug auf eine Fläche, deren Gleichung ist

$$2uu_0 = \left(x_0 \frac{du}{dx} + y_0 \frac{du}{dy} + z_0 \frac{du}{dz} + w_0 \frac{du}{dw}\right)^2,$$

eine homogene Function von  $x, y, z, w$  und  $u_0$  dieselbe Func-  
 von  $x_0, y_0, z_0, w_0$  ist.

O.

IAN NHEIM. Sur les surfaces homofocales du second  
 dre. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 322-331.

Ist ein Ellipsoid  $O$  gegeben, und legt man durch einen ge-  
 nen Punkt des Raumes die drei zu dem Ellipsoid confocalen  
 en zweiter Ordnung, so existiren zwischen  $O$  und jenen  
 Flächen gewisse geometrische Beziehungen, die in der vor-  
 nden Arbeit entwickelt werden. Dieselben führen zur Be-  
 nung der Hauptkrümmungsradien der confocalen Flächen.

Schluss der Arbeit bildet ein vom Verfasser gefundener  
 der sich auf einen einem Ellipsoid umschriebenen







**REIFFER.** Formeln für den Inhalt der Kegelfläche.  
r. Berlin.

Der Herr Verfasser specialisirt zuerst die allgemeine Flächenformel für die Kegelflächen überhaupt, dann für diejenigen mit kreisförmiger Basis, wenn der Fusspunkt der Höhe des Kegels zugleich noch ein beliebiger Punkt in der Basisebene ist, und dann weiter, wenn dieser Höhenfusspunkt in einer der beiden Axen der Basis gelegen ist. Dies führt auf ein Integral von der Form:

$$\int \sqrt{A + B \cos \varphi + C \cos^2 \varphi} \cdot d\varphi,$$

was mit aller erforderlichen Sorgfalt, wobei die Lehre von elliptischen Integralen und Functionen volle Anwendung findet, ausgewertet wird. Auch wird gelegentlich auf den Kegel mit Kreisbasis und auf anderweitige Berechnungsweisen hingewiesen.  
Mz.

andere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Flächen zweiter Ordnung von W. J. C. SHARP, M. S. EYER, W. H. BLYTHE, CURTIS, J. HAMMOND finden sich Ed. Times XXXVI. 124; XXXVII. 86-87, 108, 124.

Wn.

**BRAUNMÜHL.** Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades.  
Zeitschr. f. Math. Ann. XX. 557-587.

Der Herr Verfasser leitet zunächst die Weierstrass'schen Formeln für eine geodätische Linie ab und bringt dieselben, endlich auch die dabei auftretenden Constanten, in eine für die Berechnung möglichst bequeme Form. Alsdann teilt er die Resultate einer solchen numerischen Berechnung mit, um ein leicht durchgeführtes Zahlenbeispiel für die Rechnung mit elliptischen Functionen zu haben. Daran schliessen sich Formeln, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer geodätischen Linie, welche von einem Nabelpunkte aus-



unctionen erreicht wird. Die Darstellung ist in hohem Grade  
 ch Klarheit und Eleganz ausgezeichnet. A.

ATTAGLINI e CREMONA. Sulla memoria del prof. R. de  
 Paolis: „Sopra alcune principali forme invariative della  
 superficie di 3<sup>o</sup> ordine“. Rom., Acc. L. (3) VI. 12.

Eine ganz kurze Inhaltsangabe, an deren Schluss gesagt ist,  
 die Arbeit viele interessante neue Resultate enthalte, sowohl  
 geometrischer als in algebraischer Beziehung, und deshalb der  
 Akademie zur Einreihung in die Atti dell' Accademia empfohlen  
 A.

#### D. Andere specielle Raumgebilde.

BRILL. Nachtrag zum Catalog mathematischer Mo-  
 delle. Darmstadt. L. Brill.

In diesem Nachtrag wird Mitteilung von neueren Modellen  
 macht, welche in dem Institut des Herrn L. Brill gefertigt  
 käuflich zu beziehen sind. Es sind dies

1) Elf Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen  
 als Seifenlösung.

2) Zwei Modelle für Fadenconstructionen des Ellipsoids (aus  
 als Curven und confocalen Flächen) von Herrn STAUDE.

3) Dreiachsiges Ellipsoid aus Gyps, längs eines Kreisschnittes  
 legbar.

4) Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Dop-  
 seraden von Herrn FINSTERWALDER.

5) Einige Dupin'sche Cycliden; von demselben.

6) Flächenstreifen mit constanter positiver Krümmung, biege-  
 aus dünnem Messingblech.

7) Zwei die Wellenfläche betreffende Modelle.









eine Axe, so wird  $\sqrt{k}$  der sogenannte Trägheitsradius für die Axe genannt, weil die ganze Masse, in einen Punkt verdichtet, die Entfernung  $\sqrt{k}$  von der Axe haben müsste, um das Trägheitsmoment zu ergeben. Wählt man nun als Coordinatenanfang den Schwerpunkt  $O$ , als Axen die Hauptträgheitsachsen für  $O$ , und sind  $a > b > c$  die Quadrate der entsprechenden Hauptträgheitsradien, ist ferner  $x, y, z$  ein beliebiger Punkt  $M$  mit  $OM = \sqrt{r}$ , also  $x^2 + y^2 + z^2 = r$ , dann sind die Quadrate der Hauptträgheitsradien für  $M$  folgendermassen bestimmt: Berechne  $\lambda$  aus der cubischen Gleichung

$$(I) \quad \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1; \quad k = \lambda + r.$$

Die erste der beiden Gleichungen giebt für variirendes  $\lambda$  ein System confocaler Flächen zweiter Ordnung; jeder der drei Werte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , die dem gegebenen Punkt entsprechen, bestimmt eine der durch  $M$  gehenden Flächen dieses Systems, und die Normale zu dieser Fläche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sind die Hauptträgheitsachsen für  $M$ ; die entsprechenden Hauptträgheitsradien sind

$$k_1 = r + \lambda_1, \quad k_2 = r + \lambda_2, \quad k_3 = r + \lambda_3.$$

Die cubische Gleichung, welche direct die drei Werte  $k$  liefert, ist

$$(II) \quad \frac{x^2}{r - (k - a)} + \frac{y^2}{r - (k - b)} + \frac{z^2}{r - (k - c)} = 1.$$

Man hierin  $k$  als gegeben,  $x, y, z, r = x^2 + y^2 + z^2$  als variabel, so stellt die Gleichung eine Fläche dar. Diese Fläche ist aber aus dem Ellipsoid

$$(III) \quad \frac{x^2}{k - a} + \frac{y^2}{k - b} + \frac{z^2}{k - c} = 1,$$

man auf jedem Centralschnitte im Mittelpunkte Lote errichtet, gleich den Halbaxen des betreffenden Schnittes. Der Ort der Endpunkte dieser Lote ist die Fläche (II), d. h.: der Ort der Punkte  $M$ , für welche das Quadrat eines Hauptträgheitsradius  $k$  ist, ist die aus dem Ellipsoid (III) in der beschriebenen Weise abgeleitete Fresnel'sche Wellenfläche. Ist in (II)  $r$  constant, so stellt die Gleichung die eine der Flächen des confocalen Systems (I) dar, woraus folgt, dass alle Kugeln um  $O$  die



immt ist. Führt man in dieser Ebene senkrecht zu  $om$  eine Gerade  $o\mu = om$ , so ist der Ort der Punkte  $\mu(\alpha, \beta, \gamma)$  eine Wellenfläche, und die Normalen in den entsprechenden Punkten  $m$  und  $\mu$  liegen in derselben Ebene. Diese letztere Eigentümlichkeit ist, wie in vorliegender Arbeit gezeigt wird, auch noch statt, wenn

$$om = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = f(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}) = f(u)$$

gesetzt wird; es liegen also auch in diesem Falle die Normalen in der Ebene der correspondirenden Punkten  $m$  und  $\mu$  in derselben Ebene.

Im Fall der Wellenfläche schneiden sich die Normalen in einem Punkt, wie MacCullagh, welcher obige Relationen zuerst dargelegt hat, gezeigt hat, unter rechtem Winkel. Dies trifft in dem generellen Falle nicht mehr zu, vielmehr nur unter der besonderen Annahme, dass  $f(u) = k \cdot u$  gesetzt wird, wo  $k$  irgend eine Constante bedeutet. Schn.

PICARD. Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. Klein Ann. XIX. 569-578.

Der Herr Verfasser betrachtet Flächen, welche keine andere Singularität haben, als Doppelcurven (Selbstschnitte), bei denen die beiden Tangentialebenen in jedem Punkt der Doppelcurve verschieden sind. Er versteht nach Clebsch unter dem Geschlecht einer Fläche  $n^{\text{ter}}$  Ordnung die Zahl der Coefficienten, welche in einer durch die Doppelcurve gelegten Fläche von der Ordnung  $(n-4)$  willkürlich bleiben. Wenn sich nun die Coordinaten einer solchen Fläche durch Abel'sche Functionen zweier Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  ausdrücken lassen, so kann das Geschlecht einer Fläche die Einheit nicht überschreiten. Der Beweis dieses Satzes bildet den Inhalt der Arbeit; demselben ist ein kurzer Beweis des analogen Satzes für ebene Curven vorausgestellt. Der Satz lautet: „Wenn sich die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer irreductiblen ebenen Curve  $m^{\text{ten}}$  Grades  $F(x, y) = 0$



**J. HAMMOND, G. EASTWOOD.** Solutions of a question (5244). Ed. Times XXXVII. 74-76.

Bestimmung der sechzehn singulären Punkte, sowie der sechzehn singulären Tangenten einer speciellen Fläche vierter Ordnung. Wn.

**W. SPOTTISWOODE.** On the polar planes of four quadrics. Lond., M. S. Proc. XIII. 28-32.

Der Ort der Punkte  $P$ , dessen Polarebenen sich in Bezug auf vier Flächen dritten Grades in einem Punkte  $P'$  schneiden, ist bekanntlich die Jacobi'sche Fläche vierter Ordnung des Systems. Es wird die Frage erörtert, unter welchen Umständen  $P'$  unbestimmt wird. Wäre indessen der Verfasser davon ausgegangen, dass auch  $P'$  auf der Jacobi'schen Fläche liegt, so würde sich hieraus in Verbindung mit den Elementen der Polarentheorie grösstenteils unmittelbar der Inhalt dieser Note ergeben haben. V.

**L. DE LA RIVE.** Étude sur la projection des angles. Gen., Mém. XXVIII. No. 2.

Die Projection eines Winkels auf eine beliebige Ebene kann auf irgendermassen betrachtet werden. Denkt man sich um den Scheitel  $O$  des Winkels  $LOV$  eine Kugel mit dem Radius 1 geschlagen und vom Scheitel  $O$  aus das Lot auf die Bildebene gefällt, welches die Kugel in  $M$  trifft, so ist im sphärischen Dreieck  $OMV$  der Winkel  $M$  die Projection des Winkels  $LOV$  oder der Seite  $LV$ . Die Beziehung ist also wesentlich die der Seite eines sphärischen Dreiecks zu dem ihr gegenüber liegenden Winkel. Die Bildebene ist die Tangentialebene im Scheitel des Winkels oder eine ihm parallele Ebene.

Die Hauptaufgabe, mit welcher sich der Herr Verfasser beschäftigt, ist die Aufsuchung des geometrischen Ortes des Punktes auf der Kugel, auf dessen Tangentialebene sich ein gegebener Winkel, dessen Scheitel im Kugelcentrum liegt, mit constanter

sen von ihm selbst vorgenommenen Arbeiten stehen, und zeigt namentlich, dass für die sämtlichen Curven das aus den vier Doppeltangenten gebildete Vierseit in ein festes vollständiges Viereck auf bestimmte Art eingeschrieben ist. Am einfachsten giebt sich der geometrische Zusammenhang aus folgender Betrachtung: Projicirt man die sämtlichen ebenen Schnittcurven der Steiner'schen Fläche aus dem dreifachen Punkte  $A$  auf die Ebene  $E$ , so erhält man Curven  $C'$  mit drei Doppelpunkten auf den drei Doppelgeraden und mit vier Doppeltangenten, welche die Projectionen der Schnittlinien von  $E$  mit den vier doppelt berührenden Ebenen (conische Tangentenebenen) sind.

A.

l. MASONI. Sopra alcune curve del quarto ordine dotate di punti di ondulazione. Nap., Rend. XXI. 45-69.

Das Auftreten von Undulationspunkten, d. i. Punkten einer Curve, welche mit ihrer Tangente einen vierpunktigen Contact dritter Ordnung haben, ist eine Singularität, da der betreffende Punkt ausser der Curvengleichung zwei Bedingungen erfüllen muss. Zum Zwecke der Untersuchung der Curven vierter Ordnung mit Undulationspunkten werden zunächst einige allgemeinere Sätze entwickelt, welche zum Teil von Cayley, Kantor und Salmon ausgesprochen sind. Cayley hat den Satz aufgestellt, dass eine Curve in einem Undulationspunkte von ihrer Hesse'schen Curve berührt wird. Der Herr Verfasser beweist ferner den Satz, dass die erste Polare einer Curve vierter Ordnung mit einem Undulationspunkt  $O$  für  $O$  als Pol aufgelöst ist in die Undulationstangente und einen Kegelschnitt, und dass dieser Satz sich umkehren lässt. Dieser Kegelschnitt wird der harmonische Kegelschnitt des Punktes  $O$  genannt. Er ist nicht erste Polare von  $O$ ; dieselbe ist vielmehr aufgelöst in die Tangente und die Polare jenes harmonischen Kegelschnittes.

Es wird weiter gefolgert, dass durch einen Undulationspunkt folgende Curven gehen:

1) Der Ort eines Punktes, dessen polare Gerade in Bezug





ind. Im letzteren Falle kann die Gleichung in die Form gebracht werden:

$$x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0,$$

wo  $x_1, x_2, x_3$  homogene Punktcoordinaten bedeuten. Dieser Fall, der als der speciellste ein besonderes Interesse hat, wird noch einer eingehenden Discussion unterworfen. A.

H. M. JEFFERY. On spherical curves of the fourth class with quadruple foci. Quart. J. XVIII. 270-311.

Im Anschluss an eine lange Reihe ähnlicher Untersuchungen (F. d. M. VIII. 1876. 512. 476, IX. 1877. 560, X. 1878. 482, XI. 1879. 513, XII. 1880. 566. 610, XIII. 1881. 534), speciell an die zuletzt bezeichneten, werden in dieser Arbeit die sphärischen Curven vierter Klasse mit vierfachen Brennpunkten einer ausserst eingehenden Discussion unterzogen. Es werden dabei acht Hauptfälle unterschieden. Die Gesichtspunkte des Herrn Verfassers sind in früheren Referaten genügend gekennzeichnet.

A.

H. M. JEFFERY. On spherical cycloidal and trochoidal curves. Quart. J. XIX. 44-66.

In einer kurzen historischen Einleitung werden die den Gegenstand betreffenden Arbeiten von Hermann (Act. Petrop. 1726), Johann Bernoulli, Clairaut, Nicole (alle drei acad. des sciences 1736) Lexel (Act. Petrop. 1779) und Gudermann (1830) aufgezählt. Darauf werden die Eigenschaften der sphärischen Cycloiden und Epicycloiden und Epitrochoiden entwickelt. Die Resultate sind zum grossen Teil bereits in den genannten Arbeiten enthalten. Es kam dem Herrn Verfasser wesentlich auf eine zusammenhängende, seinen Methoden entsprechende Darstellung an; doch ergeben sich dabei auch einige neue Lehrsätze und Formeln über die betrachteten Curven. Die Betrachtungen erstrecken sich auf die Aufstellung der Gleichungen in sphärischen

en Cylinderfläche abrollt. Die betrachteten ebenen Schnitte umliche Parallelcurven, u. s. f. A.

NEPER. Ueber Flächen mit besonderen Meridianen. Gött. Abh. XXIX.

Die Normale in einem beliebigen Punkte einer Fläche bilde die bestimmte Richtung, die zur positiven  $z$ -Axe gewählt wird. Der Winkel  $u$ , und ihre Projection auf die  $xy$ -Ebene bilde mit der  $x$ -Axe den Winkel  $v$ ; dann kann man  $u$  als Polhöhe,  $v$  als Länge des betrachteten Punktes definiren, ebenso wie auf der Kugelfläche. Die Curven  $u = \text{const.}$  und  $v = \text{const.}$  sind das Analogon der Parallelkreise und der Meridiane. Die ersten werden vom Verfasser Meridiancurven, die letzteren Curven gleicher Polhöhe genannt. Mit jenen Meridiancurven bezieht sich nun die Arbeit besonders. Referent möchte beobachten, obwohl dies in der Arbeit nicht hervorgehoben ist, dass Meridiancurven zu den sogenannten Contourlinien gehören. Die Contourlinie auf einer Fläche, für einen beliebigen Punkt  $P$  das Projectionscentrum, ist der Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die die Fläche gelegten Tangenten; sie bildet also im einfachen Falle die Schattengrenze auf der Fläche, wenn die Lichtstrahlen von  $P$  ausgehen. Rückt der Punkt in's Unendliche, so wird der Berührungskegel in einen Cylinder über, und die Contourlinie wird zu einer Meridiancurve. Die Schaar der Meridiancurven, welche in der vorliegenden Arbeit betrachtet wird, ist die Schaar, für welche die Schaar der Projectionscentra auf einer Ebene in entfernten Geraden liegt. Nimmt man nun noch einige Eigenschaften der Flächentheorie zu Hülfe, so ergibt sich, dass die in der Arbeit durch nicht ganz einfache Rechnungen gewonnenen Resultate sehr einfach ohne jede Rechnung formuliren lassen sich die Resultate sogar ohne Weiteres wesentlich einfacher formuliren.

In der Aufstellung allgemeiner Rechenformeln und Unterbrechnungen der Krümmungen einer Meridiancurve werden die

















Fiedler's Entdeckung schon deshalb unabhängig von der von Salmon, weil Herr Fiedler diese Erzeugung schon bei Gelegenheit der Bearbeitung der dritten Auflage der Salmon-Fiedler'schen „Analytischen Geometrie des Raumes“ (1878) erkannt hatte, ohne sie freilich sofort zu publiciren. Was aber die Hauptsache ist, die Entwicklung von Herrn Fiedler liefert drei projective Erzeugungen der Complexe und führt nicht blos zu denen zweiten, sondern auch zu denen  $n^{\text{ten}}$  Grades. Ferner muss hervor-gehoben werden, dass die vorliegende Arbeit des Herrn Fiedler für der neuen Auflage der Reye'schen „Geometrie der Lage“, wo diese Dinge berührt werden, erschienen ist. Scht.

G. BATTAGLINI. Sui connessi ternarii di 1<sup>o</sup> ordine e di 1<sup>a</sup> classe. Batt. G. XX. 230-249.

Der Verfasser entwickelt in elementarer Weise, bei welcher nur das Princip der symbolischen Schreibweise benutzt wird, einige der Haupteigenschaften der Connexe (1,1) und der Coin-idenzen zweier solcher Connexe. Dass der Connex und sein conjugirter von vornherein als völlig gleichwertig durch die Gleichungen  $(Ax)(bY) = 0$ ,  $(aX)(By) = 0$  eingeführt werden, ist nun und für sich wohl von Interesse; die Uebersichtlichkeit der Darstellung, die sich in manchen Punkten auch vielleicht hätte kürzer fassen lassen, scheint indessen nicht dadurch zu gewinnen, dass gleichzeitig immer die verschiedenen Formen, in denen dem-nach jede Relation auftreten muss, aufgestellt werden.

V.

A. WEILER. Die Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. Schlömilch Z. XXVII. 257-288.

Von den 58 verschiedenen Complexen zweiten Grades, welche der Verfasser zuerst in seiner Dissertation (Clebsch Ann. VII. . F. d. M. V. 1873. 416) beschrieben hat, haben 38 eine Regel-läche zur Singularitätenfläche. Lässt sich nun der Complex



## Capitel 5.

### Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

#### A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

F. ASCHIERI. La trasformazione quadratica doppia di spazio; e la sua applicazione alla geometria dello spazio non Euclideo. Lomb., Ist. Rend. (2) XIV. 673-683; XV. 66-77, 147-154, 247-250.

Charakteristisch für diese Untersuchungen ist die Einführung des Begriffes des „Abstandes“ zweier linearer Complexe  $X, Y$  im Sinne der nicht-euclidischen Geometrie, wie folgt. In dem Complexbüschel  $(X, Y)$  befinden sich zwei specielle Complexe, deren Axen bekanntlich die Directricen der den Complexen des Büschels gemeinsamen Congruenz sind. Irgend eine Ebene trifft diese beiden Directricen in einem Punktepaar, auf dessen Verbindungsline sich noch ein zweites ausgezeichnetes befindet: Das der Pole der Ebene, bez. der beiden Complexe  $X, Y$ . Dann wird unter dem Logarithmus des Doppelverhältnisses des zweiten Punktepaars zum ersten, noch multiplicirt mit  $\frac{1}{\pi}$ , der gewünschte Abstand definirt. Dies wird im Besondern auf den Fall angewandt, wo die beiden Complexe dem vierfach ausgedehnten Gebiet  $\Omega^{(4)}$  der zu einem festen linearen Complex  $\theta$  in Involution stehenden Complex angehören. Die speciellen Complexe dieses Gebietes bilden ein dreifach ausgedehntes Gebiet  $\Sigma^{(3)}$ . Dann kann man auch sagen: Der Abstand zweier (linearer) Complexe  $X, Y$  des Gebietes  $\Omega^{(4)}$  unterliegt der üblichen Definition eines nicht-euclidischen Abstandes, wenn man den Raum  $\Omega^{(4)}$  als einen nicht-euclidischen, mit dem Raum  $\Sigma^{(3)}$  als absolutem Grundgebilde, auffasst.

Dies findet zunächst seine Anwendung auf den gewöhnlichen Linienraum  $Y^{(4)}$ , indem dieser zum Raume  $\Omega^{(4)}$  in eine ein-zwei-













AYLEY. On two cases of the quadric transformation between two planes. J. Hopkins Circ. 1882. 178-179.

Die Aufgabe, den dritten Schnittpunkt der ebenen cubischen

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz = 0$$

der Verbindungsgeraden zweier ihrer Punkte zu suchen, erfüllt seine Coordinaten:

$x_3 : y_3 : z_3 = P + 2lA : Q + 2lB : R + 2lC = P : Q : R = A : B : C$ ,  
 die  $P, Q, R, A, B, C$  in den Coordinaten der beiden gegebenen Ebenen von zweitem Grade sind. Denkt man sich hier einen festen Punkt als fest, den anderen als beweglich und dem  $(z)$  entsprechend, und sieht man von der Entstehung der Darstellungen

$$x_3 : y_3 : z_3 = P : Q : R; \quad x_3 : y_3 : z_3 = A : B : C$$

ab, so kommt man zu zwei (auch in der Form) umkehrbaren quadratischen ein-eindeutigen Transformationen zwischen zwei Ebenen. My.

MA. Sulla corrispondenza (1, 2) ed (1, 3). Torino, Atti. II. 431-447.

Die einfachsten Elemente beider Correspondenzen bis zur Auflösung ihrer vollen Systeme werden invarianten-theoretisch entwickelt und eine Anwendung gemacht auf die Segmente, die einer Geraden von correspondirenden Punkten begrenzt sind. My.

PEANO. Formazioni invariantive delle corrispondenze. Batt. G. XX. 79-101.

sind zwei doppelt binäre Formen

$$f = a_x^m \alpha_x^\mu, \quad g = b_x^n \beta_x^\nu$$

Correspondenzen  $(m\mu), (n\nu)$  gegeben, deren Variabele von einander abhängigen linearen Transformationen unterworfen werden, so daß der Process der doppelten Ueberschiebung

Die Tangenten eines Cykels über. Im Besondern giebt es auch unendlich viele Cyklen, deren reciproke Bilder Punkte (Punktblüschel) sind. Der Tangentialabstand zweier Cyklen ändert sich durch die Transformation nicht, ein Satz, der auf Tangentialabstände irgend welcher Curven ausgedehnt werden kann.

Anwendung erscheint z. B. ein einfacher Beweis des Satzes: „Drei Aehnlichkeitscentra dreier Cyklen (zu je zweien) liegen auf einer Geraden.“ Ferner eine einfache Lösung des Apollonischen Problems. Zum Schluss weist der Herr Verfasser auf den Zusammenhang hin, den eine geschickte Combinirung obiger Transformation mit der der Inversion bietet. My.

S. VANEČEK. Sur l'inversion générale. C. R. XCIV. 1042-1044.

Herr Hirst hatte eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Inversion (in der Ebene) angegeben, nach der zwei Punkte  $x, y$  sich von einander sind, wenn sie in Bezug auf einen festen Geradenabschnitt conjugirt sind, und wenn noch ihre Verbindungsgerade durch einen festen Punkt geht. Der Herr Verfasser will die Idee von einer Verallgemeinerung dieser Hirst'schen Transformation geben, es entgeht ihm aber, dass seine Transformation mit der Hirst'schen völlig identisch ist. Es folgen Anwendungen auf verschiedene besondere Fälle. My.

CERTO. Lo spazio delle omologie affini di un piano posto in relazione con lo spazio delle coniche dello stesso piano. Batt. G. XX. 321-346.

V.

## B. Conforme Abbildung.



chen Physik deductiv ableiten, ausserdem aber auch dem Leser zum weitem Studium Anregung und Anleitung geben soll. Weiteres wird durch Uebungsaufgaben, welche älteren klassischen Werken (Newton, Euler, Lagrange) entnommen sind, noch weiter aber durch knapp gehaltene historische und literarische Notizen erzielt, welche jedem grösseren Abschnitte beigelegt sind. Sie dürften trotz ihrer Kürze den Leser über die wichtigsten Erscheinungen in der diesbezüglichen Literatur hinreichend orientiren.

Grosse Sorgfalt hat der Verfasser der Architektonik seines Werkes zugewendet. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass zur Zeit alle unsere Vorstellungen auf dem Gebiete der Physik ein vorwiegend mechanisches Gepräge haben, teilt er die Physik in abstracte (reine) und concrete (angewandte) Mechanik (letztere allerdings nur im weitesten Sinne des Wortes). Während erstere Bewegung, Masse und Kraft im Allgemeinen untersucht, befasst letztere mit besonderen (concreten) Kräften und Kraftwirkungen, wobei sich eine natürliche Scheidung nach zwei Typen ergibt. Der Gravitationstypus beherrscht hauptsächlich jenes Gebiet, in welchem die Wirkungen dem Gesetze des umgekehrten quadratischen Verhältnisses der Entfernung unterliegen (Gravitation, Magnetismus, Elektrizität), und der Molecularstypus (Vibrationsstypus) hauptsächlich dasjenige, in welchem die Erscheinungen vom directen einfachen Verhältnisse der Entfernung abhängen. Dadurch ist die Sonderung des Stoffes in drei Teile beschrieben. Der vorliegende erste Teil des Werkes behandelt die abstracte Mechanik, abgesehen von einer etwas ausführlicher gehaltenen Einleitung, worin der Umfang der zum weitern Studium der theoretischen Physik erforderlichen mathematischen und geometrischen Kenntnisse festgestellt und die der Physik näher stehende mathematische Disciplinen, Differentialrechnung, Methode der kleinsten Quadrate in Kürze dargestellt werden.

Da die Mechanik die Darstellung der von Massen ausgehenden, durch Kräfte verursachten Bewegungen zur Aufgabe hat, erscheint es angemessen, 1) die Bewegung an sich;









Die Entwicklung des Fundamentalsatzes der Kinematik, dass jeder Körper in eine beliebig gewählte andere Lage durch eine einfache Schraubenbewegung übergeführt werden kann, und giebt folgendes generelle Theorem: „Wenn ein Körper in drei verschiedenen Lagen im Raum gegeben ist, so lässt sich jeder derselben als Symmetrieegebilde eines und desselben Körpers in Bezug auf drei bestimmte Gerade auffassen, und zwar sind diese Geraden die drei gemeinsamen Perpendikel von je zwei der drei Drehachsen, um welche durch Schraubenbewegung jeder der drei Körper in die Lage des anderen übergeführt werden kann.“

Schn.

G. GAUTERO. Del movimento di una superficie che ne tocca costantemente un' altra fissa. Batt. G. XX. 163-193.

Eine einfache kinematische Untersuchung. Rs.

E. HABICH. Théorème de cinématique. Nouv. Ann. (3) I. 458-462.

Es werde die Bewegung einer Ebene auf einer festen Ebene charakterisirt durch die beiden Rouletten  $(C)$  und  $(C')$ , von denen  $(C)$  in der festen Ebene,  $(C')$  in der beweglichen enthalten sei, und  $O_1$  sei der augenblickliche Berührungspunkt beider, oder der augenblickliche Drehpunkt des bewegten Systems. Das augenblickliche Drehungscentrum zweiter Ordnung ist ein Punkt  $O_2$ , welcher auf der gemeinsamen Normale beider Rouletten gelegen ist und von  $O_1$  eine Distanz  $O_1O_2 = \frac{RR'}{R \pm R'}$  besitzt, wenn  $R$  und  $R'$  die Krümmungsradien der Rouletten  $(C)$  und  $(C')$  bedeuten. Sind nunmehr in der beweglichen Ebene zwei Curven  $(A)$  und  $(a)$  gegeben, welche auf der festen Ebene bezüglich die Curven  $(B)$  und  $(b)$  umhüllen, und bedeuten  $K'$  und  $K$  die Krümmungscentren bezüglich von  $(A)$  und  $(B)$ ,  $k'$  und  $k$  die von  $(a)$  und  $(b)$ , so finden folgende Relationen statt. Die beiden Geraden  $K'k'$  und  $Kk$  schneiden sich in einem Punkte  $L$ ; dieser liefert,

Bewegung, sowie die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten bestimmt. Rs.

---

H. HART. Quaternion proof of the triple generation of three-bar motion. *Mess.* (2) XII. 32.

Der Verfasser giebt einen kurzen Beweis für Mr. S. Roberts' Theorem der dreifachen Erzeugung der Drei-Stangenbewegung. *Lond., M. S. Proc.* VII. p. 14, s. *F. d. M.* VIII. 1876. 551), welcher gleichzeitig den Nutzen der Quaternionen bei der Untersuchung der Eigenschaften der Gelenkbewegung beleuchtet.  
Glr. (O.).

---

J. JANSE. Bz. Stoomverdeelingsysteem van Gebr. Sulzer. *Nieuw Arch.* IX. 61-86.

Ausführliche Berechnung eines neuen Dampfverteilungssystems bei der Dampfmaschine, welche durch Gebrüder Sulzer in Winterthur auf der Pariser Weltausstellung von 1878 ausgestellt wurde. Die verschiedenen Curven, welche einzelne Punkte des Systems beschreiben, werden in Gleichungen gebracht und daraus die Form und Eigenschaften abgeleitet. G.

---

## Capitel 3.

### S t a t i k.

#### A. Statik fester Körper.

J. PETERSEN. Statik, Forelæsninger holdte ved den polytekniske Lærestalt. Kjöbenhavn 1881. Höst & Søn. 8°.

Ausser dem, was man in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Statik findet, enthält das vorliegende noch zwei wichtige Zusätze. Der erste ist ein Capitel über das astatische Gleich-



**E. WENZEL.** Zur Zurückführung der schiefen Ebene auf den Hebel. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 385-393.

Die Hebelstange bildet selbst die schiefe Ebene; Rollführungen bewirken, dass die angreifenden Kräfte vorgeschriebene Winkel mit der Ebene bilden. Die vom Verfasser in Aussicht gestellten Schul-Apparate, welche in diesem Sinne die Theorie des Hebels und der schiefen Ebene gleichmässig und gleichzeitig zu demonstrieren gestatten, werden sich in der Tat zur Belebung des statischen Unterrichts förderlich erweisen. Auch ist es richtig, wenn der Verfasser zum Schlusse sagt: „Es erscheinen mit- in sämtliche Maschinen auf eine einzige einfache, den Hebel, zurückführbar.“ Diese Tatsache ist schon von altersher wohl- bekannt; so findet man in den mechanischen Lehrbüchern von De la Hire und Kästner das Kräfteparallelogramm als einen Ausfluss der Lehre vom Winkelhebel dargestellt und damit diese Lehre überhaupt zum ersten Princip der theoretischen Mechanik erhoben.

Gr.

**G. BARDELLI.** Sui sistemi variati di forze. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 180-195.

Für ein System von Kräften, von welchen irgend eine Componente die Intensität  $P$  besitzt, werden folgende Bezeichnungen eingeführt, wobei immer nur eine der drei analogen Gleichungen wiedergegeben wird:

$$D_1 = \sum P x \alpha, \quad E_1 = \sum P y \alpha, \quad F_1 = \sum P z \alpha, \quad X = \sum P \alpha, \quad M_x = E_2 - F_2;$$

ferner

$$V = XM_x + YM_y + ZM_z.$$

Ein verändertes System eines gegebenen Systems von beliebig vielen Kräften erhält man dadurch, dass man die Geraden, welche die Kräfte darstellen, sich um Linien drehen lässt, die parallel zu einer beliebigen Richtung durch die Angriffspunkte gezogen sind. Die Coordinatenachsen  $Ox, Oy, Oz$  seien in eine neue Lage  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$  gebracht; eine Gerade  $OL$ , deren Richtungscosinus  $l, m, n$  sind, und ein Winkel  $\theta$  (die Rotationsaxe

Wenn Kräfte in der Richtung von sechs im Raume gegebenen Linien so wirken, dass die statische Summe Null ist, muss eine gewisse geometrische Bedingung von den sechs Linien erfüllt werden. Trifft dies zu, dann sagt man von den Linien, sie sind in Involution. Der Verfasser zeigt, dass die Bedingung für die Involution analytisch durch das Verschwinden einer gewissen zusammengesetzten Determinante ausgedrückt werden kann. Die Determinante ist von Cayley in den Cambr. Trans. 1861 pt. 2 gegeben.

Rs.

**A. LEGOUX.** Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance. Nouv. Ann. (3) I. 145-153.

Man bezeichne mit  $m_i$  die Massen der anziehenden Punkte  $A_i$ , mit  $x_i, y_i, z_i$  die Coordinaten dieser Punkte, mit  $x, y, z$  die des angezogenen Punktes  $M$ , mit  $u_i$  die Entfernungen des Punktes  $M$  von den Punkten  $A_i$ , und man nehme an, dass die vom Punkte

$A_i$  auf  $M$  ausgeübte Anziehung durch  $\frac{m_i}{u_i^{n+1}}$  dargestellt sei. Fer-

ner sei  $d_i = [u_i]_{x=0, y=0, z=0}$ . Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stabilität des Gleichgewichtes sind dann durch drei Ungleichheiten ausgedrückt:

$$(n-1) \sum \frac{m_i}{d_i^{n+2}} < 0,$$

folglich  $n < 1$ .

$$\frac{m_i m_{i+1} \sin^2(d_i d_{i+1})}{(d_i d_{i+1})^{n+2}} - (2n+1) \left( \sum \frac{m_i}{d_i^{n+2}} \right)^2 > 0.$$

bezeichnet den Winkel der beiden Richtungen  $OA_i$  und  $O$  den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet.

wobei  $\frac{1}{2}$ .

Die Gleichheit ist weitläufiger; es ist aber leicht



## B e m e r k u n g .

---

In Folge einer längeren Krankheit des Herausgebers ist trotz aufopferndster Unterstützung eine Verzögerung im Erscheinen des 4. Bandes nicht zu vermeiden gewesen. Auch haben sich trotz größter Sorgfalt mancherlei Auslassungen und Unzuträglichkeiten eingeschlichen. Seitens der Redaction wird Alles geschehen, um diese Mängel noch nachträglich im folgenden Bande auszugleichen. Wir richten indes an die Herren Fachgenossen die ergebene Bitte, uns durch Mitteilung von etwa bemerkten Mängeln unterstützen zu wollen. Die Verzögerung im Erscheinen wird sich nur auf den 4. Band erstrecken, da alle Schritte getan sind, um den Druck des 15. Bandes zur gewohnten Zeit beginnen und beenden zu können.

Wir benutzen die Gelegenheit zur Wiederholung der Bitte an die Herren Fachgenossen, uns durch rechtzeitige Uebersendung von Separatabzügen ihrer Arbeiten, namentlich Programmen und in nicht speciell mathematischen Zeitschriften erscheinende Arbeiten zu unterstützen.

O.

---





1 in einem Medium drehen, dessen Temperatur veränderlich bewegt sich ihr Schwerpunkt, als wenn er zu einem Körper selber Art gehörte, welcher in demselben Medium mit derselben Winkelgeschwindigkeit sich um eine Axe dreht, die mit den Axen parallel ist. Diese mittlere Rotationsaxe erhält man durch, dass man auf jeder besonderen Axe irgend einen Punkt nimmt und den Schwerpunkt dieser Punkte bestimmt, in welchen sich die Massen der entsprechenden Körper concentrirt denkt. Dieser Schwerpunkt gehört der mittleren Axe an.“ Der Verfasser bedient sich des Quaternionencalculs.

2) Dem Satze von Résal giebt der Verfasser folgende allgemeinere Fassung: Wenn Massen von den Ecken eines geschlossenen Polygons sich gleichzeitig fortbewegen und die Seiten nach demselben Bewegungsgesetze mit Geschwindigkeiten durchlaufen, die in jedem Augenblicke den durchlaufenen Seiten proportional sind, wird der Schwerpunkt des Systems der beweglichen Massen fest bleiben. (In 3 ist dieser Satz mit etwas verändertem Wortlaut wiedergegeben und bewiesen.) Ferner wird der Satz des Herrn Laisant elementar bewiesen.

4) Schlegel zeigt, wie mit Hülfe der Grassmann'schen Rechnungsweise der Satz von Laisant gewonnen wird. Rs.

JUNG. Alcuni teoremi baricentrici. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 499-506.

JUNG. Osservazioni ed aggiunte alla nota „Alcuni teoremi baricentrici“. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 646-653.

Der Verfasser leitet eine Anzahl von Sätzen über Schwerpunkte von schief abgeschnittenen Cylindern mit beliebiger Basis, wie über Schwerpunkte der krummen Oberflächen jener Cylinder. Von jenen Sätzen, deren Zahl zu gross ist, um alle einzeln anzuführen, sei hier der folgende hervorgehoben:

„Legt man durch einen festen Punkt der zweiten Axe eines Cylinders (d. i. derjenigen Geraden, auf der die Schwerpunkte der Perimeter aller Normalschnitte liegen) verschiedene Ebenen,



die einer Parabel dritten Grades. Die Spannung in einem beliebigen Punkte ist

$$T = T_0 \left[ 1 - \frac{p^2 \cos^2 i}{2T_0^2} x(x_1 - x) \right] + x p \sin i$$

erreicht ihren grössten Wert in  $A_1$ :

$$T_1 = T_0 + x_1 p \sin i.$$

Wenn  $\varepsilon_0$  den Winkel bezeichnet, den die Tangente in  $A_0$ ,  $\varepsilon_1$  den spitzen Winkel, den diejenige in  $A_1$  mit der  $x$ -Axe bildet, erhält man in der erwähnten Annäherung

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \frac{p^2 x_1^2 \sin 2i}{8T_0}.$$

Betrachtungen lassen sich z. B. anwenden auf den Fall, dass eine Kette auf zwei Rollen von kleinem Durchmesser ruht, oder dass sie in  $A_0$  an eine Widerstand leistende Masse angeknüpft ist, wie bei Zugbrücken etc. Sbt.

AMBEY. Solution d'une question de mécanique élémentaire. Nouv. Ann. (3) I. 254-256.

Folgende Aufgabe wird gelöst: „Ein homogener schwerer und unendlich dünner Streifen, welcher die Gestalt eines Halbkreises  $ABC$  hat, wird von einem Faden gehalten, welcher an beiden Enden des Durchmessers  $AB$  befestigt ist und durch einen unendlich kleinen Ring geht. Die Gleichgewichtslagen des Streifens sollen bestimmt werden, und es soll angegeben werden, wann das Gleichgewicht stabil, wann es instabil ist. Die Länge ( $l$ ) des Fadens, der Radius ( $R$ ) des Halbkreises  $ABC$  und das Gewicht ( $P$ ) des Streifens sind gegeben; das Gewicht des Fadens wird vernachlässigt.“ Rs.

AZZARELLI. Momenti d'inerzia delle linee, superficie e volumi. Rom, Acc. P. d. N. L. XXXIV. 159-230.

Die Arbeit besteht aus Beispielen für die Anwendung der Integralrechnung. Rs.















lieben. Dagegen sind die meisten Aenderungen im Capitel (Aufgaben über die Berechnung von Trägheitsvorgenommen. Drei Aufgaben (148, 152 und 192) und einige Male (nach Aufgabe 138, 149) wird darauf gemacht, wie man die Zahl der gestellten Aufgaben vermehren kann. Die Capitel fünf (Aufgaben über Bewegung um eine feste Axe) und sechs (Aufgaben über Bewegungen von Punktsystemen) scheinen unverändert zu sein. Rs.

NNE. Questions de mécanique rationnelle.  
m. (8) IV. 106-114.

NNE. Nouvelle manière d'employer le principe de moindre action, dans les questions de dynamique.  
IV. 169-171.

NNE. Sur un passage de la „Mécanique analytique“, relatif au principe de la moindre action.  
IV 1110-1111.

NNE. Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux et aux moments d'inertie. (Balance d'oscillation pour l'évaluation des moments d'inertie). C. R. XCV. 337-338.

Obt aus fünf Paragraphen. § 1 enthält kurze historisierungen über das Princip der kleinsten Wirkung bis zu Jacobi's Aeusserungen über dieses Princip scheinen

Vom Verfasser unbekannt zu sein. An dem Beispiel, dass ein schwerer Punkt auf einer Curve in einer verticalen Ebene herunterfällt, wird im § 2 (abgedruckt in 2) gezeigt, wie bei Anwendung teilweiser Integration das Princip der kleinsten Wirkung zur Lösung mechanischer Aufgaben benutzt werden kann. § 3 (abgedruckt in 3) wird der Satz gewonnen: „Für ein System von Körpern, deren jeder seine besondere Geschwindigkeit hat, giebt das Princip der kleinsten Wirkung eine Bedingung zwischen der gesamten entwickelten lebendigen Kraft







nach für die elliptische Bewegung  $O$  nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze gilt. Um dieses aus der elliptischen Bewegung herzuleiten, betrachtet er besonders die Bewegung eines Punktes  $S$ , welche den symmetrischen Punkt des zweiten Brennpunktes  $F_1$  in Bezug auf die Tangente in dem beweglichen Punkte  $X$  darstellt. Es wird nämlich dann die Länge der Gerade  $F_1 S$  mit der Geschwindigkeit von  $X$  proportional, während zugleich die Geschwindigkeit von  $S$  die Anziehung darstellt. Diese geometrische Darstellung giebt ein einfaches Mittel nicht nur zur vollständigen Discussion der verschiedenen auftretenden Fälle, sondern auch zur Construction der Bahn. Schliesslich wird gezeigt, wie ähnliche Betrachtungen auch im Falle, dass die Anziehung von dem Centrum einer Ellipse ausgeht, verwendet werden können.

Gm.

J. MORRISON. Integration of the general equations of motion. Anal. IX. 100-112.

Elementare Untersuchung der elliptischen Bewegung.

Jn. (O.).

G. DILLNER. Om integration af differentialeqvationerna i  $n$ -kroppar-problemet. Stockh., Öfv. 1882. No. 4. 13-20.

Dieser Aufsatz handelt von der Integration der Differentialgleichungen in dem Problem der  $n$  Körper, giebt zwei fundamentale Systeme von Gleichungen an und untersucht die Form der allgemeinsten Integrale, die diesen Systemen genügen.

E.

GASCHEAU. Etude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel. S. M. F., Bull. X. 207-219.

GASCHEAU. Explication de deux paradoxes apparents observés dans les solutions de quelques problèmes de mécanique rationnelle. Toul., Mém. (8) IV. 137-146.

1) Der Verfasser untersucht die Bewegung eines materiellen





G. GREENHILL. On the motion of a projectile in a resisting medium. Art. Inst., Proc. XI. No. 7, XII. No. 1.

Der Verfasser giebt die Formeln für die Trajectorie wieder, wie er sie für den Fall, dass der Widerstand der Luft gegen das Geschoss sich wie die dritte Potenz der Geschwindigkeit ändert, in den Proc. R. Artil. Inst. XI. 138 mitgeteilt hatte. Die Gleichung für die Bahn wird transformirt. In der neuen Gleichung kommt ein elliptisches Integral dritter Gattung vor, für welches durch Einführung der  $\Theta$ -Functionen ein geschlossener Ausdruck erhalten wird. In entsprechender Weise wird auch der früher gewonnene Ausdruck für die Zeit, während welcher sich das Geschoss bewegt hat, umgeformt. Der Verfasser bemerkt, dass der einzige andere vollständig lösbare Fall der sei, wenn der Widerstand der Luft sich proportional der Geschwindigkeit ändert. Drei Tabellen sind beigegeben, welche Herr P. A. MacMahon berechnet hat, und die nur von praktischem Interesse sind.

Rs.

J. D'OCAGNE. Remarques sur le pendule. Nouv. Ann. (3) I 32-33.

Für ein Kreispendel, welches sich in einem einen constanten Widerstand leistenden Mittel bewegt, werden die beiden Sätze ergeleitet: „Zwei auf einander folgende Winkel, welche das Pendel in gleichen Zeitintervallen beschreibt, sind den Winkelgeschwindigkeiten, welche das Pendel in der Mitte jedes der Zeitintervalle hat, proportional.“ „Die Differenz zweier auf einander folgender Winkel, welche vom Pendel während gleicher Zeitabschnitte beschrieben werden, ist der Winkelbeschleunigung des Pendels längs der Trennungslinie der beiden Winkel proportional.“

Rs.

Th. v. OPPOLZER. Beitrag zur Ermittlung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen.

Wien. Ber. LXXXVI. 713-732, Wien. Anz 1882. 209-216.



der Cycloide normal zu dieser ist. Ausserdem werden die Länge für die Bogenlänge und für den Krümmungsradius der Curve, sowie für den Inhalt derjenigen Fläche bestimmt, die von der Curve und den Coordinatenachsen begrenzt wird.

Rs.

ÉSAL. Sur les propriétés mécaniques de la lemniscate. Nouv. Ann. (3) I. 481-490.

In Bezug auf die Tangente der Lemniscate wird der Satz ausgesprochen: „Die Tangente bildet mit dem Radiusvector einen Winkel, welcher doppelt so gross ist, wie der Polarwinkel.“ Darauf werden die Ausdrücke für die Subtangente, die Rectification, den Krümmungsradius und die Quadratur der Lemniscate angegeben, beziehungsweise hergeleitet.

Analytisch gelöst wird „das Theorem von Saladini“ (Mem. Inst. naz. ital. I. 49. 1804): „In welcher von all' den Curven, die in einer Verticalebene liegend, denselben Anfangspunkt haben, gibt sich ein Schwerpunkt, wenn er irgend ein Bogenstück derselben Zeit durchlaufen soll, wie die entsprechende Sehne?“ Hier löst der Verfasser analytisch und geometrisch das Theorem von Bonnet (Liouville J. IX. 1844): „Für welche unter allen Curven, welche denselben Anfangspunkt haben, durchläuft ein Punkt von jenem Anfangspunkte aus ohne Anfangsgeschwindigkeit allein unter der Wirkung einer gegen ein festes Centrum wirkenden und proportional der Entfernung wirkenden Kraft einen Bogen in derselben Zeit, welche er gebrauchen würde, um die entsprechende Sehne zurückzulegen?“

Rs.

AN GEER. Over de beweging van stelsels, gebonden aan voorwaarden, die afhangen van den tijd. Nieuw Arch. II. 1-22.

Fortsetzung der Abhandlung im vorigen Jahrgang (siehe



mit einem Punkte auf eine horizontale Ebene stützt unter der Voraussetzung, dass diese Ebene eine bestimmte Bewegung in verticaler Richtung hat, und der besondere Fall, dass die Ebene frei fällt, behandelt. G.

GAMBEY. Solution d'une question de mécanique. Nouv. Ann. (3) I. 508-515.

Ein schwerer Punkt  $M$ , der auf der Oberfläche eines Rotationskegels mit verticaler Axe bleiben muss, wird von einem Punkt im Scheitel  $S$  des Kegels nach einem Gesetz angezogen, welches durch eine Function der Entfernung  $MS$  dargestellt wird. Diese Function soll nun so bestimmt werden, dass die Bahn von  $M$  eben ist. Es ergibt sich

$$f(\varrho) = g \cos \theta + \frac{\lambda^2}{p \sin^3 \theta} \cdot \frac{1}{\varrho^3} - \frac{\lambda^2 \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta} \cdot \frac{1}{\varrho^3}.$$

Die Bewegung wird dann im Weiteren näher untersucht.

O.

HÖKLEN. Ueber die Aufhängepunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers. Kronecker J. XCIII. 177-183.

Die Länge des einfachen Pendels, welches isochron mit einem um eine feste Axe beweglichen Körper schwingt, sei  $l$ ; ferner sei  $\sigma$  „der Trägheitsradius, welcher einer durch den Schwerpunkt  $O$  gehenden Geraden parallel mit der Schwingungsaxe entspricht, und  $d$  der Abstand derselben von  $O$ .“ Dann ist

$$l = \frac{\sigma^2 + d^2}{d}.$$

$OJ$  ist das von  $O$  auf die Schwingungsaxe gefällte Perpendikel, also  $J$  der Aufhängepunkt, durch den unter Umständen mehrere Schwingungsaxen senkrecht zu  $OJ$  gehen, und es soll die Frage untersucht werden: Welches ist der Ort der Punkte  $J$ , sowie auch die Richtung der zugehörigen Schwingungsaxen, wenn  $\sigma = \text{const.}$ “



























tionsellipsoid ist. Er verbessert auch einen Zeichenfehler in der McCullagh'schen Gleichungen, die er weitläufig unter-  
t. Csy. (O.).

Hess. Ueber das Problem der Rotation. Klein Ann. X. 461-470.

Die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt für die zwei Fälle bereits gelöst: 1) Der Körper bewegt sich seinen Schwerpunkt; 2) ein Umdrehungskörper rotirt um einen festen Punkt seiner Axe. Der Verfasser zeigt, dass für einen beliebigen starren Körper vom Gewichte  $P$ , welcher um einen festen Punkt  $O$  unter dem Einflusse eines beliebig anwendenden Kräftepaars rotirt, „die Componente des wirkenden Kräftepaars bezüglich der Richtung der Schwere während der ganzen Dauer der Bewegung constant ist.“ Die Cosinus  $a'', b'', c''$  Winkel, welche die Verticale  $OZ$  mit den drei Hauptträgachsen ( $OX', OY', OZ'$ ) des Körpers bildet, können leicht bestimmt werden. Wenn man diese Werte in die Euler'schen Bewegungsgleichungen einsetzt, bekommt man ein System dreier alternativer linearer Bewegungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeiten  $p, q, r$  der Drehung um  $OX', OY', OZ'$ . Indem eine Bedingung hinzugefügt wird, dass die drei Axen des Kräftepaars, der Figur und der Schwere in einer und derselben Ebene liegen, (dies findet statt, wenn die Axe des afficirenden Kräftepaars, welches die Bewegung im Anfang hervorbringen soll, in die durch die Figuraxe, die Verbindungslinie des festen Punktes mit dem Schwerpunkte  $S$ , gelegte verticale Ebene fällt), erhält man die beiden Sätze: „Die Grösse des Kräftepaars, welches den Körper angreift, ist während der ganzen Dauer der Bewegung constant.“

„Die Kräftepaaraxe beschreibt im Raume einen Kreiskegel, dessen Spitze der feste Drehpunkt ist, und dessen Axe die Richtung der Schwere besitzt.“

Die Lösung vereinfacht sich, wenn man über die Lagen des Schwerpunktes  $S$  und des Unterstützungspunktes  $O$  specielle



die Feder eines Dynamometers. Ferner wollte er die Lösung für die Praxis verwerten. In dem Auszuge deutet der Verfasser an, welchen Erfolg er erzielt hat: Die Discussion seiner Formeln lasse die Beziehung zwischen der theoretischen Curve und gewöhnlichen Parabel erkennen. Wenn man mit  $p$  die Grösse bezeichnet, indem  $l$  die Länge und  $e$ , die halbe Dicke des Bleches im Befestigungspunkte bedeuten, betrage der Fehler ungefähr  $\frac{p}{2}$ , falls man den gewöhnlichen Umriss nehme, sei er kleiner als  $\frac{p}{25}$ , falls man einen weniger einfachen Umriss wähle, welchen der Verfasser beschreibt. Rs.

GROSSMANN. Zur Theorie der Reglage. D. Uhrm. Z. VI. 9-11.

Die Theorie der Reglage besteht in der Berechnung der Zeitdauer einer Unruheschwingung. Mittels des Trägheitsmoments der Unruhe  $A$  und der Kraftmomente  $F$ , welche auf die Unruhe wirken, kann man die Winkelbeschleunigung  $J = \frac{F}{A}$  bestimmen. Daraus berechnet man die Winkelgeschwindigkeit, und aus dieser die Zeitdauer einer Schwingung. Der Verfasser giebt an, wie man das Trägheitsmoment  $A = \frac{P}{g} R^2$  annähernd berechnet. Unter den Kräften, welche auf die Unruhe wirken, ist die bei weitem grösste die der Spiralfeder. Es wird gezeigt, wie man das Moment derselben auf praktischem Wege bestimmen kann. Auch wird noch die Untersuchung, wie man es mit Hilfe der Elasticitätsgesetze berechnet, begonnen. Eine Fortsetzung soll folgen. Sbt.



de Linienelemente giebt, die bei der Elementarbewegung ihre Richtung nicht ändern, und dass diese schief zu einander stehen. Nach des Referenten Ansicht sind Erörterungen, wie die skizzirten, wenn ihre Resultate auch nur zum Theil neu nützlich. Die Ableitungen, die der Verfasser in der vorliegenden Arbeit giebt, lassen indessen zu wünschen übrig. Namentlich ist der folgende principielle Irrthum zu rügen. Bei der Elementarbewegung beschreibe ein Linienelement den Winkel  $\epsilon dt$  und es seien die Projectionen des Winkels  $\epsilon dt$  auf die Coordinatenachsen resp.  $\vartheta dt$ ,  $\iota dt$ ,  $\kappa dt$ , so sollen nach des Verfassers  $\vartheta$ ,  $\iota$ ,  $\kappa$  die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des betrachteten Linienelements sein. Das ist unrichtig; es müsste mit dem Worte Winkelgeschwindigkeit etwas anderes gemeint sein, als man sonst in der Mechanik darunter versteht, was wieder ist nirgends gesagt.

In einem Schlussparagraphen wird die Combination einer rotatorischen Bewegung der ganzen Flüssigkeit mit Potentialbewegung behandelt, ohne dass sich wesentlich Neues ergibt. Die Einleitung endlich enthält historische Notizen über die Erscheinungen, in denen die Elementarbewegung einer Flüssigkeit erörtert ist.

Wn.

DOWNSEND. On a property in the theory of the rotational strain of an incompressible lamina in the plane of its mass. Herm. 1832.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn bei einer rotationslosen Bewegung einer ebenen Flüssigkeitslamelle in ihrer Ebene die Linien und ihre Orthogonalen für die Maximalverschiebung der Moleküle durch die Gleichungen

$$r^n \cos(n\vartheta) = a^n \quad \text{und} \quad r^n \sin(n\vartheta) = b^n$$

ausgedrückt werden, so sind die Gleichungen der entsprechenden Dilatation von der Form:

$$r^{\frac{1}{2}n} \cos\left(\frac{1}{2}n\vartheta\right) = a^{\frac{1}{2}n} \quad \text{und} \quad r^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2}n\vartheta\right) = b^{\frac{1}{2}n}.$$

Csy. (Wn.).



mus sich durch rein kinematische Betrachtungen lösen lassen, was viel einfacher, als in der gewöhnlichen Gastheorie, wo das Problem des Zusammenstosses ziemlich complicirte dynamische Betrachtungen erfordert. Solche Folgerungen lassen erkennen, dass die Wirbeltheorie einen viel fundamentaleren Charakter hat, als die gewöhnliche Gastheorie, nach der die Atome aus kleinen Stücken fester Materien bestehen.

Cly. (Wn.).

A. G. GREENHILL. On the rotation of a liquid ellipsoid about an axis, not a principal axis, but lying in a principal plane. Cambr., Proc. IV. 208-222.

In einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 719) hatte der Verfasser behauptet, es schiene nicht möglich zu sein, dass ein flüssiges Ellipsoid um eine andere Axe, als eine Hauptaxe rotire und dabei eine freie Oberfläche habe. Inzwischen wurde er mit der Riemann'schen Arbeit über die Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids (Göttinger Abhandl. 1861; Riemann, gesammelte Werke, p. 168) bekannt, in der gezeigt ist, dass man eine mögliche Form des Gleichgewichts erhält, falls die Rotationsaxe in einer der Hauptebenen des Ellipsoids liegt. In der vorliegenden Arbeit nun behandelt der Verfasser die obige Frage von Neuem, wobei er den umgekehrten Weg einschlägt wie Lejeune-Dirichlet und Riemann. Die genannten Autoren nehmen von vorne herein die Existenz von Flächen gleichen Druckes an, die der Ellipsoidfläche ähnlich sind, und sie bestimmen dann diejenige Bewegung der Flüssigkeit, welche mit der Existenz jener Flächen gleichen Druckes verträglich ist. Umgekehrt geht Herr Greenhill hier davon aus, dass der Flüssigkeit auf irgend eine Weise eine gewisse Bewegung erteilt ist, und untersucht dann den in einem Punkte stattfindenden Druck für den Fall, dass die Flüssigkeit von starren Wänden eingeschlossen ist. Daran schliesst sich die Erörterung der Bedingungen, die nötig sind, damit an der Oberfläche einer ellipsoidisch





**A. SCHÜLKE.** Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. Hoppe Arch. LXVIII. 113-150.

Der Verfasser knüpft an die bekannte Arbeit von Kirchhoff über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, auf die keine Kräfte wirken, an (cfr. F. d. M. II. 1870. 731; Kirchhoff, Mechanik p. 233-247). Herr Kirchhoff hatte die Lösung in zwei speciellen Fällen zu Ende geführt, während er im allgemeinen Falle die Rechnung nur bis zur Aufstellung der elliptischen Integrale, von denen das Problem abhängt, durchgeführt hatte. Der allgemeine Fall war dann weiter behandelt durch Löpcke (cf. F. d. M. IX. 1877. 670), der alle in der Kirchhoff'schen Lösung vorkommenden Grössen durch Thetafunctionen ausdrückte. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst dieselbe Reduction auf Thetafunctionen auf etwas einfacherem Wege vorgenommen. Die Vereinfachung gelingt durch kleine Umformungen der Kirchhoff'schen Formeln, sowie durch passende Verfügung über die Integrationsconstanten, resp. über die Anfangslage der Axensysteme. Endlich wird gezeigt, wie man, auch ohne die elliptischen Functionen zu benutzen, durch Discussion der transformirten Kirchhoff'schen Formeln ein deutliches Bild des Bewegungsvorgangs gewinnen kann. Namentlich lässt sich die Gestalt der Curve bestimmen, welche die Projection des Anfangspunktes des im Körper festen Axensystems auf eine senkrecht zur Rotationsaxe beschreibt; und daraus ergibt sich die Schraubenbewegung jenes Anfangspunktes, sowie die Richtung der Rotationsaxe.

Wn.

---

**DE ST.-VENANT.** Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. C. R. XCIV. 904-909, 1004-1008, 1139-1144.

Der vorliegende Aufsatz knüpft an eine im Jahre 1870 veröffentlichte Arbeit von Boussinesq an (cf. F. d. M. II. 1870. 738-741), in der gezeigt war, dass der Bewegungszustand einer durch



sine derartige Lage haben, dass, wenn man alle Oeffnungen als anziehende Centra betrachtet, die zu den ursprünglich vorhandenen Wänden senkrechten Anziehungscomponenten verschwinden. Somit sind die obigen Betrachtungen nur dahin zu modificiren, dass an Stelle eines anziehenden Centrums deren unendlich viele treten. Für die Praxis genügt es, nur einige dieser Centra, die der ursprünglichen Oeffnung zunächst liegen, in's Auge zu fassen.

Wn.

J. BOUSSINESQ. Intégration de certaines équations aux dérivées partielles, par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe  $\int$  le produit de deux fonctions arbitraires. C. R. XCIV. 33-36.

J. BOUSSINESQ. Équations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide. C. R. XCIV. 71-74.

J. BOUSSINESQ. Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'émersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal. C. R. XCIV. 127-130.

J. BOUSSINESQ. Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte de deux coordonnées horizontales. C. R. XCIV. 1505-1508.

Das bestimmte Integral

$$(1) \quad \varphi = \int_0^x f\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha \\ = \int_0^x f\left(x \mp \frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha$$

genügt der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^{2n} \varphi}{\partial t^{2n}} + A \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = 0,$$



sozu noch zwei Anfangsbedingungen kommen. Ist im Anfang nur eine Verrückung, aber keine Geschwindigkeit vorhanden, ist so

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ für } t = 0,$$

so wird die Lösung folgende:

$$\varphi = \int_0^\infty \left[ f\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + f\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

so

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - m^2) dm,$$

oder

$$f(x, z) = -\frac{2\sqrt{z}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x + z\eta) d\eta}{1 + \eta^2}$$

Hierin stellt  $F(x)$  die anfängliche Verrückung der Oberfläche, h. den Wert von  $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  für  $t = 0$ ,  $z = 0$  dar. Die Wellenlänge in einem beliebigen Punkte der Oberfläche zur Zeit  $t$  wird

$$\lambda = \frac{2\sqrt{z}}{\pi} \int_0^\infty \left[ F\left(x - \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) + F\left(x + \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \right] \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

die Formel, die für grosse Werte von  $x$  in eine von Cauchy auf viel umständlicherem Wege abgeleitete Formel übergeht (Mémoires savants étrangers I. 186). Nachdem diese Formel eine einfache Anwendung erfahren, sodann kurz angedeutet ist, wie sich die Resultate gestalten, wenn im Anfang nur Geschwindigkeiten, aber keine Verrückungen vorhanden sind, zeigt der Verfasser zum Schluss, dass sich die obige Lösung auch auf den Fall ausdehnen lässt, wo  $\varphi$  ausserdem noch von der Coordinate  $y$  abhängt. In Bezug auf die für diesen allgemeineren Fall abgeleiteten Resultate müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen.

Wn.











so grösser ist, je kleiner die Dichtigkeit ist. Auch wird daraus Verminderung berechnet, welche die lebendige Kraft der Wirbelbewegungen durch eine Reibung erfährt.

Weiter wird angenommen, dass die Flüssigkeit unzusammenlegbar ist und sich bis in das Unendliche an der einen Seite der ebenen Fläche erstreckt. Ohne Reibung bleibt die Wirbelbewegung in der Grenzebene, mit Reibung pflanzt sie sich durch die ganze Flüssigkeit fort; die Geschwindigkeit dieser Fortpflanzung wird berechnet und die Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von Zöppritz (Wiedemann Ann. III. 596, s. F. d. M. X. 78. p. 649) gezeigt. Darauf kommt der Verfasser auf die bekannte Frage nach der Bewegung eines Umdrehungsellipsoids in der Flüssigkeit, doch jetzt mit Berücksichtigung der Reibung und unter der Voraussetzung, dass alle Bewegungen sehr klein und stationär sind. Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, so wird die Berechnung der Widerstände und Strombahnen sehr einfach. Ist aber die Bewegung nicht stationär, so gelangt man zum Ellipsoid auf eine sehr complicirte Differentialgleichung. Unter der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeiten endliche Werthe haben, ist die Auflösung mit Berücksichtigung der Reibung unmöglich. G.

LAMB. On the oscillations of a viscous spheroid.  
Lond., M. S. Proc. XIII. 51-66.

Die hydrodynamischen Gleichungen für incompressible reibende Flüssigkeiten werden hier angewendet zur Bestimmung der kleinen Schwingungen, welche eine nahezu kugelförmige Flüssigkeitsmasse vollführen kann, falls auf dieselben keine andern Kräfte wirken, als die gegenseitige Anziehung der einzelnen Teile.  $\omega$  das Potential dieser Anziehung,  $p$  der Druck,  $\rho$  die Dichtigkeit,  $\mu$  der Reibungscoefficient, und setzt man

$$\omega = \frac{p}{\rho} - v,$$

ferner an, dass  $\omega$  sowohl, als die Geschwindigkeitscomponenten  $u, v, w$  von der Form sind  $e^{-at}$  multiplicirt mit einem von







**Lösung** des gestellten Problems. Die weitere Behandlung **in-**  
**dessen** wird nicht mehr allgemein durchgeführt, sondern nur unter  
**der** Annahme, dass das Gebiet  $w = cz$  das Innere eines Kreises  
**vom** Radius  $R$  einnimmt, während das Gebiet  $w = 0$  ausserhalb  
**dieses** Kreises liegt; ferner wird  $\varphi$  und  $W$  als nur vom Abstand  $r$   
**vom** Mittelpunkte abhängig angenommen. Die partiellen Diffe-  
**rentialgleichungen** für  $\varphi$  und  $W$  gehen dann in gewöhnliche  
**Differentialgleichungen** über, die sich unmittelbar integrieren lassen,  
**und** durch passende Wahl der Integrationsconstanten lässt sich  
**den** Continuitätsbedingungen genügen. Die so gefundene parti-  
**culäre** Lösung ist jedoch den Beschränkungen  $k > c$  und  $c > 0$   
**unterworfen**. Nachdem die Ausdrücke für die Geschwindigkeit  
**und** den Druck weiter discutirt sind, schliesst der Verfasser mit  
**einer** Anwendung seiner Formeln auf ein Zahlenbeispiel. Den  
**Fall** eines absteigenden Luftstroms ( $c$  negativ) hat der Verfasser  
**nicht** erledigt. Eine Bemerkung über die dabei sich darbietende  
**Schwierigkeit** trifft nach des Referenten Ansicht nicht das Wesen  
**der** Sache. Der Grund liegt vielmehr darin, dass in diesem Falle  
**das** particuläre Integral (3) für das äussere Gebiet nicht mehr  
**ausreicht**. Wn.

---

**SPRUNG.** Zur Theorie atmosphärischer Wirbel. Hamb. Mitt.  
 No 2; 27-31.

Im ersten Teile wird die Beschleunigung der relativen Be-  
 wegung eines schweren Punktes auf der rotirenden Erdoberfläche  
 bestimmt. Die Ableitung des bekannten Ausdrucks für diese  
 Beschleunigung ist weder besonders elegant, noch streng. Mit  
 Hülfe des gefundenen Ausdrucks werden dann die Differential-  
 gleichungen für die Bewegung eines schweren Punktes auf der  
 Erdoberfläche aufgestellt, auf den eine Centrakraft wirkt, wäh-  
 rend derselbe zugleich einen Reibungswiderstand proportional der  
 Geschwindigkeit erleidet. Diese Gleichungen werden unter der  
 Voraussetzung, dass die geographische Breite constant ist, auf  
 Polarcoordinaten transformirt und der dadurch gewonnene Aus-  
 druck für die Grösse der Centrakraft discutirt. Wn.

---



$$M = \frac{H}{\frac{r}{m} + \frac{\lambda}{n}},$$

welcher für einen bestimmten Wert von  $mn$  ein Maximum wird in dem Falle, dass der Widerstand der Leitung gleich dem der Röhre ist.

Wenn durch eine Pumpe eine Wassermenge  $M$  kg. in 1<sup>s</sup> auf die Höhe  $H$  mtr. gehoben und durch eine Röhrenleitung, deren Verlusthöhe  $z$  beträgt, dieselbe einem Wasserrade zugeführt wird, so bleibt von der erzeugten potentiellen Energie  $E_a = MH$  der Teil  $E_i = M(H-z) = Mh$  als der für das Rad verfügbare Effect übrig, und die durch den Röhrenwiderstand in 1<sup>s</sup> verbrauchte und in Wärme umgesetzte Arbeit ist

$$E_w = Mz = M^2\lambda.$$

Diese Vorrichtung ist ein Analogon zu einem Elektromotor von der Stromstärke  $J-i$ , ( $\lambda$  der Gesamtwiderstand,  $J\lambda = H$  die elektromotorische Kraft der Batterie,  $i\lambda$  die des Elektromotors), für den der absolute Effect  $E_a = (J-i)J\lambda$ , der indirecte Effect  $E_i = (J-i)i\lambda$ , die in Wärme umgesetzte Arbeit

$$E_w = E_a - E_i = (J-i)^2 \cdot \lambda$$

ist. Eine zweite Analogie erhält man, wenn man das Wasserrad ersetzt durch eine calorische Maschine, welche einen Carnot'schen Process zwischen den absoluten Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$  durchführt, wobei statt  $h$  die Temperaturdifferenz  $T_1 - T_2$ , statt  $M$  das Zeuner'sche Wärmegewicht  $\frac{Q_1}{AT_1}$  zu setzen ist, und die indirecte

Arbeit  $E_i = \frac{Q_1}{AT_1} (T_1 - T_2)$  geliefert wird; wenn man ferner die

Pumpe durch eine sogenannte calorische Pumpe, d. i. eine Maschine ersetzt, welche einen umgekehrten Carnot'schen Process zwischen den Temperaturen  $T_2$  und  $T_3$  ( $> T_1$ ) ausführt, wobei die Arbeit

$E_a = \frac{Q_3}{AT_3} (T_3 - T_2)$  erforderlich ist; die von der calorischen

Pumpe abgeleitete Wärmemenge  $Q_3$  geht auf dem Wege zur calorischen Maschine durch Ausstrahlung teilweise ( $Q_3 - Q_1$ ) verloren, so dass der verloren gegangene Wärmeeffect



$$E_w = \frac{Q_3 - Q_1}{A} = \frac{Q_1}{AT_1} (T_3 - T_1) = E_a - E_i$$

ist. Wenn also:

$$M = J - i = \frac{Q_1}{AT_1}; \quad H = J\lambda = T_3 - T_2;$$

$$h = i\lambda = T_1 - T_2 \quad \text{und} \quad (H - h) = z = (J - i)\lambda = T_3 - T_1$$

ist, so bestehen die Analogien:

$$E_a = MH = MJ\lambda = (J - i)J\lambda = \frac{Q_1}{AT_1} (T_3 - T_2),$$

$$E_i = Mh = Mi\lambda = (J - i)i\lambda = -\frac{Q_1}{AT_1} (T_1 - T_2),$$

$$E_w = Mz = M(J - i)\lambda = (J - i)^2\lambda = M^2\lambda = -\frac{Q_1}{AT_1} (T_3 - T_1).$$

Aus der Vergleichung folgen (den Bestimmungen des Congresses gemäss) die Beziehungen:

$$1 \text{ Volt} = \text{Einheit der elektromotorischen Kraft} = 10^6 \text{ mtr.},$$

$$1 \text{ Ampère} = \text{Einheit der Stromstärken} = \frac{10^{-6}}{g} \text{ kg. in l}^s,$$

$$1 \text{ Ohm} = \text{Einheit des Widerstandes} = 10^{12} \cdot g \text{ mtr. Sbt.}$$

für die Stromstärke von 1 kg.

## Capitel 5.

### P o t e n t i a l t h e o r i e.

E. BELTRAMI. Sul potenziale magnetico. Brioschi Ann. (2) X. 241-260.

Sir W. Thomson hat gezeigt, dass bei einem Magneten eine bestimmte, durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Gerade und ein eben solcher Punkt existirt, die er als Axe und Centrum des Magneten bezeichnet. (Vergl. Reprints of papers on electrostatics and magnetism, London 1872). Herr Beltrami gelangt nun,

ndem er die Anziehung gleich einer beliebigen Function der Distanz setzt, zu dem Resultat, dass auch hier noch eine ausgezeichnete Gerade und ein ausgezeichneter Punkt oder Axe und Centrum existiren. Wählt man dann für das Anziehungsgesetz das Newton'sche, so stimmen die Definitionen der beiden Autoren für die Axe überein, für das Centrum dagegen nicht. Die Methode beruht darauf, dass das Potential zweier Systeme von Massenpunkten approximativ unter der Voraussetzung entwickelt wird, dass die Distanz beider Systeme sehr gross sei im Vergleiche mit ihren Dimensionen. An die ausführliche Discussion des so entstehenden Ausdruckes für das Potential schliesst sich die Vergleichung mit den Thomson'schen Ausdrücken. Den Schluss bildet eine Theorie der Trägheitsmomente von Massensystemen ohne Schwerpunkt. B.

---

TONELLI. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di  $n$  dimensioni. Brioschi Ann. (2) X. 291-321.

Bezieht sich auf eine Arbeit von Beltrami, die 1869 in den Mem. di Bologna erschienen war. B.

---

F. ANGELITTI. Sull' attrazione secondo una potenza intera qualunque della distanza. Batt. G. XX. 346-369.

Unter der Voraussetzung, dass die Anziehung einer ganzen positiven Potenz der Distanz umgekehrt proportional sei, werden folgende homogene Massenvertheilungen behandelt:

1) Massen und angezogener Punkt in einer Ebene: unbegrenzte Gerade, Halbebene, Kreisbogen, Kreissector und Kreissegment (angezogener Punkt im Centrum), Parabelbogen, Ellipsenbogen.

2) Massen und angezogener Punkt nicht mehr in einer Ebene: unbegrenzte Ebene, Umdrehungsfläche und Umdrehungskörper (Punkt auf der Umdrehungsaxe). B.

---







# **Elfter Abschnitt.**

## **Mathematische Physik.**

### **Capitel 1.**

#### **Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.**

##### **A. Molecularphysik.**

**G. J. MICHAËLIS.** Ueber die Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiedemann Ann. XVII. 726-736.

Der Verfasser modificirt die Theorie der elastischen Nachwirkung, wie Warburg sie (Wied. Ann. IV. 1878. 232-249) gegeben hat, dadurch, dass er noch Kräfte einführt, welche die Molecüle in ihre ursprünglichen Richtungen zurückzutreiben suchen, wie W. Weber in seiner Theorie des inducirten Magnetismus ähnliche Kräfte, welche bestrebt sind, die Molecularmagnete in ihrer natürlichen Richtung festzuhalten, eingeführt hat. Darauf zeigt der Verfasser, wie verschiedene von Braun beobachtete Erscheinungen (Poggendorff Ann. CLIX. 1876. 337-389) aus dieser Theorie abgeleitet werden können. Rs.

**L. SOHNCKE.** Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie aus der Theorie der Krystallstructur.  
Wiedemann Ann. XVI. 489-500.

Zunächst wird gezeigt, dass das „Rationalitätsgesetz“ kurz ausgesprochen werden kann: „Wählt man drei mögliche



Die orthogonale Transformation bezieht sich auf drei Variable  $x, y, z$ , d. h. man geht von einem rechtwinkligen Koordinatensysteme im Raume zu einem zweiten solchen mit gleichem Anfangspunkt  $O$  über. Der Herr Verfasser giebt zunächst eine systematische Zusammenstellung aller in der Mechanik fester und flüssiger Körper, Elektrizität, Magnetismus, Potentialtheorie etc. auftretenden Invarianten einer solchen Transformation, insbesondere von denen, die einer oder zwei Flächen zweiten Grades mit  $O$  als Mittelpunkt zugehören. Es mögen dies einige Beispiele erläutern.

Die Gleichung der Centralaxe (in der Statik) lautet

$$\frac{\xi - \frac{N\Sigma Y - M\Sigma Z}{R^2}}{\Sigma X} = \frac{\eta - \frac{L\Sigma Z - N\Sigma X}{R^2}}{\Sigma Y} = \frac{\zeta - \frac{M\Sigma X - L\Sigma Y}{R^2}}{\Sigma Z}.$$

Da sowohl die Zähler als die Nenner je drei mit  $x, y, z$  cogrediente Grössen sind, bleiben diese Gleichungen bei der Transformation ungeändert. Eine Fläche zweiten Grades mit  $O$  als Mittelpunkt lautet:

$$U \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = \mu.$$

Hier werden die sechs Coefficienten linker Hand nach demselben Gesetz transformirt, wie  $x^2, y^2, z^2, yz, zy, xy$ . Dann giebt es bekanntlich drei Invarianten  $D, S, \Delta$  in jenen Coefficienten, resp. vom ersten, zweiten, dritten Grade, sowie zwei unabhängige Covarianten (und zwar vom zweiten Grade in den Variabeln). Besonders wichtig für die Physik sind die beiden speciellen Fälle, wo die  $a, b, c, f, g, h$  einmal proportional sind mit

$$u^2, v^2, w^2, vw, wu, uv;$$

andererseits mit

$$uu', vv', ww', \frac{1}{2}(vw' + v'w), \frac{1}{2}(wu' + w'u), \frac{1}{2}(uv' + v'u),$$

$u, v, w$  cogredient mit  $x, y, z$ ). Im ersten Falle verschwinden  $S$  und  $\Delta$  identisch.  $D$  wird  $u^2 + v^2 + w^2$ , wie z. B. das Momentquadrat

$$(Yz - Zy)^2 + (Zx - Xz)^2 + (Xy - Yx)^2.$$

Im zweiten Falle verschwindet  $\Delta$ ,  $D$  wird  $uu' + vv' + ww'$ ,  $S$  wird  $(vw' - v'w)^2 + (wu' - w'u)^2 + (uv' - u'v)^2$ , wie z. B. die Functionen





**R. R. WEBB.** Stress and strain in cylindrical and polar coordinates. *Mess.* (2) XI. 146-155.

Der Verfasser giebt einen Ausdruck für die Spannung in cylindrischen Coordinaten  $(r, \theta, z)$  und in Polarcoordinaten in drei Dimensionen; dann bildet er die Bewegungsgleichungen in beiden Coordinatensystemen. Er betrachtet ferner die folgenden besonderen Fälle: 1) die cylindrische radiale Spannung; 2) die cylindrische transversale Spannung; 3) die gleichförmig in einer senkrecht zur Axe liegenden Ebene verteilte Torsion; 4) die sphärische radiale Spannung. Glr. (O.).

**J. BOUSSINESQ.** Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques produites, dans tout milieu homogène et isotrope indéfini, sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne. *C. R.* XCIV. 1648-1650.

Es wird der Satz gefunden: „Man kann sich vorstellen, dass die wirklichen Dilatationen in den verschiedenen Teilen eines Körpers von Verrückungen herrühren, welche in jedem Augenblicke und in jedem Punkte dieselbe Grösse, aber die entgegengesetzte Richtung der Newton'schen Attraction haben, die auf die Masseneinheit während derselben Zeit und in demselben Punkte von einer Masse ausgeübt werden würde, deren Dichte beständig proportional diesen Dilatationen wäre. Folglich ist die entgegengesetzte Verrückung, welche jedes Teilchen in die Lage des natürlichen Zustandes zurückbringen würde, in Grösse und Richtung durch die Anziehung dargestellt, welche es ausübt.“

Gewisse totale Verrückungen, welche gewissen Dilatationen entsprechen, können daher nach dem Newton'schen Attractionssetze bei Benutzung des vorstehenden Satzes berechnet werden. Für eine Flüssigkeit gelangt man auch auf diesem Wege zu dem Resultate, welches der Verfasser in einer anderen Mitteilung *C. R.* XCV. 1504) veröffentlicht hat. Rs.







Die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Discussion wahrscheinlich, dass der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft.“ Besonders einfach werden die Formeln für den Fall, dass beide sich berührende Körper Kugeln sind. Nachdem der Verfasser einige Beispiele gegeben hat, wendet er die Formeln auf den Stoss elastischer Körper an, d. h. dieses Problem wird näherungsweise gelöst. Die grösste Annäherung der Körper, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck, die Dimensionen der Stossfläche und die Dauer der Berührung (die Stosszeit) werden bestimmt. Die Werte dieser Grössen für den centralen Stoss zweier Stahlkugeln von gleichem Radius werden angegeben.

Rs.

---

J. H. DARWIN. On the stresses caused in the interior of the earth by the weights of continents and mountains. Phil. Trans. CLXXIII. 187-230.

Der Verfasser betrachtet die Festigkeit und Härte der Erdmaterie von einem Gesichtspunkt aus, der bisher nicht berücksichtigt zu sein scheint. Der erste Teil (p. 188-218) ist einer mathematischen Untersuchung gewidmet, die sich auf eine bekannte Arbeit von W. Thomson stützt. Der zweite Teil enthält eine summarische Uebersicht und Discussion der vorangehenden Arbeit.

Cly. (O.).

---

R. R. WEBB. On the equilibrium of a bent plate.

Mess. (2) XI. 156-160.

Untersuchung des Gleichgewichtes einer geneigten Platte, unter den Bedingungen, dass dieselbe isotrope elastische Eigenschaften habe, und dass die Abweichung von einer ungespannten Platte von gleichmässiger Dicke unendlich klein ist.

Glr. (O.).









mit den nach seiner Theorie berechneten Werten sich in Einklang befinden.

In einem Nachtrage wird noch kurz erwähnt, dass in Folge der Abhandlung von Hertz „Ueber die Berührung fester elastischer Körper“ der Verfasser einige Beobachtungen bezüglich des Einflusses der Krümmung der zusammenstossenden Flächen gemacht hat. Das Ergebnis wird mitgeteilt. Die Krümmung ist von Einfluss; doch meint der Verfasser, dass neben der Wirkung der Krümmung die von ihm erörterten Umstände sehr merklichen Einfluss haben. Daher hat er begonnen, die Elasticität der an verschiedenen Oberflächen haftenden condensirten Gasschichten beobachtend zu untersuchen.“

Rs.

L. BOLTZMANN. Experimente über den Stoss von Cylindern. Wiedemann Ann. XVII. 343-347.

Abdruck von Wien. Ber. LXXXIV. 1225-1229, s. F. d. M. XII. 1881. 740.

Rs.

SEBERT et HUGONOT. Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. C. R. XCV. 213-215, 278-281, 333-340.

SEBERT et HUGONOT. Sur le choc longitudinal d'une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités. C. R. XCV. 381-384.

SEBERT et HUGONOT. Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant à son extrémité une masse additionnelle. C. R. XCV. 775-777.

1) Nachdem an die Arbeit von de Saint-Venant (siehe das Referat über die Abhandlung von Hertz, oben p. 809) erinnert ist, in welcher angenommen war, dass der betrachtete Stab dem Stosse eines zweiten prismatischen Stabes, der dieselbe Symmetrieaxe bat, unterworfen ist, wird das Problem gelöst: Die Schwingungs-



**blèmes de Mécanique**, dans lesquels les conditions imposées aux extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des fonctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie de toutes les parties du système. (Liouville J. (2). IX. 25-83. 14)“ war den Verfassern bei ihren früheren Mittheilungen noch unbekannt. Sebert und Hugoniot sehen als besonderen Vorteil bei der Behandlung des Problems an, dass sie nicht die Functionen  $\varphi$  und  $\psi$  selbst, sondern deren Ableitungen  $\varphi'$  und  $\psi'$  bestimmen, weil dadurch die Elementarvorgänge der Phänomene klarer hervortreten. Ein von Philipps behandelter Fall wird benutzt, um man an einem Beispiele erkennen zu lassen. Rs.

**SAINT-VENANT.** Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; Considérations du cas extrême où la barre heurtante est très raide et très courte. C. R. XCV. 359-365, 422.

**SAINT-VENANT.** Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité non heurtée. C. R. XCV. 423-427.

1) Die Mittheilungen von Sebert und Hugoniot veranlassten den Verfasser, eine Fortsetzung seiner 1867 veröffentlichten Abhandlung zu geben. Die Gleichungen des vorliegenden Problems können auf zwei Arten gelöst werden: 1) in endlichen Termen durch die Summe zweier willkürlicher Functionen von  $(x \pm wt)$ , deren Gestalt sich nach jeder Reflexion der Erschütterungen ändert; durch trigonometrische Reihen. Es wird die zweite Lösungsart benutzt und im Speciellen angenommen, dass die Zeit, während welcher der Schall die Länge des stossenden Stabes, der prismatisch, elastisch, aber sehr kurz und hart sei, durchläuft, als unendlich klein gegen die entsprechende Zeit für den gestossenen prismatischen elastischen Stab betrachtet werden kann. Dann wird genau jener Ausdruck gefunden, welchen Navier 1823 für



und der Fall longitudinaler Stösse behandelt, welcher zu dem  
 bereits von Young aufgestellte Satze führt: Das Verhältnis der  
 ersten Geschwindigkeit, welche der Stange durch longitudinale  
 Stösse mitgeteilt wird, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des  
 Stosses darf die Elasticitätsgrenze nicht überschreiten, wenn  
 die Structur keine Aenderung erleiden soll. Aus beiden Sätzen  
 wird gefolgert: Die Geschwindigkeit eines transversalen Stosses,  
 welcher eben fähig ist, die Structur zu ändern, ist im Verhältnis  
 von  $1:k$  kleiner, als diejenige eines longitudinalen Stosses, wel-  
 cher dieselbe Wirkung durch Ausdehnung hervorbringt, und zwar  
 ist das Verhältnis  $1:2$  für einen runden Stab, und  $1:\sqrt{3}$  für  
 einen rechteckigen Stab, der senkrecht zu seiner Seitenfläche ge-  
 stossen wird. Diese Sätze gelten auch für Stangen von end-  
 licher Länge, so lange die durch den Stoss erzeugte Bewegung  
 am nicht gestossenen Ende der Stange nicht bemerkbar ist.

In 2) werden analoge Betrachtungen für eine Platte ange-  
 stellt. Dabei wird eine in den C. R. XCIV. 514 (s. Seite 302)  
 mitgeteilte Integrationsmethode benutzt. Es bezeichne  $v$  die Ge-  
 schwindigkeit des direct erschütterten Teiles der Platte,  $w$  die  
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit, mit welcher sich longitudinale Schwingungen  
 der Platte fortpflanzen,  $\partial$  und  $\partial'$  die linearen Hauptdilatatio-  
 nen, so wird gefunden

$$v = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} (\partial - \partial') w = 0,9069 (\partial - \partial') w.$$

Daraus schliesst der Verfasser, dass das Verhältnis  $\frac{v}{0,9069w}$   
 den Wert der Elasticitätsgrenze des Stoffes nicht erreichen kann,  
 und dass der Rand des Teiles, auf welchen der Stoss ausgeübt  
 wird, eine bleibende Veränderung erleidet. Es sei  $\mu$  die Masse  
 des stossenden Körpers, bezogen auf die Masse der Oberflächenein-  
 heit der Platte,  $V$  die Geschwindigkeit jener Masse zur Zeit  
 $t = 0$ ,  $h$  die halbe Dicke der Platte und  $a = \frac{hw}{\sqrt{3}}$ , so ergibt  
 sich ferner: Die Verrückung des gestossenen Punktes strebt der  
 Grenze  $\frac{\mu V}{3a}$  zu, während für den Fall des transversalen Stosses



1) Reibung erzeugten Wirkungen keine Rolle spielt, wird abge-  
 hen. Es sei  $C$  die Lage des Ballmittelpunktes während des  
 Stosses,  $A$  der Berührungspunkt mit  $S'$ ,  $Ay$  die durch  $A$  gehende  
 Parallele zur Schnittlinie der beiden Ebenen,  $Az$  die äussere  
 Normale zu  $S$ ,  $v$  die zu  $Ax$  parallele Componente der Geschwin-  
 digkeit  $v$  von  $C$  zu irgend einer Zeit während des Stosses,  $p$  und  
 $q$  die Componenten der Rotation um  $C$  parallel zu  $Ay$  und  $Az$ .  
 Der Verfasser bestimmt  $v, p, q$  für das Ende des Stosses, be-  
 achtet dann den einfachen Fall, dass zu Anfang des Stosses  
 $v = 0$  ist, und fügt die Bemerkung hinzu, dass die angestellten  
 Betrachtungen sich auch auf den Fall anwenden lassen, wenn  
 die Ebene  $S'$  durch eine zur Ebene  $S$  normale Cylinderfläche  
 ersetzt wird, wie beim „billard forain“.

2) Navier's Raisonement wird nach dessen Darstellung in  
 l'architecture de Belidor. 1819. Tome I. p. 121 wiedergegeben.  
 Die Formeln von Navier entsprechen die, welche der Verfasser  
 in 3 in seinem Traité de Mécanique générale Tome I. gegeben  
 hat. Der Verfasser kennt genaue Experimente über den Stoss  
 vollkommen elastischer Körper nur von Coriolis (Théorie  
 schématique des effets du jeu de billard, p. 89). Diese Ex-  
 perimente scheinen die Hypothese von Navier, welche für den  
 directen Stoss auf die des Verfassers zurückkommt, zu recht-  
 fertigen. Nach dem Verfasser kann man bezüglich des Stosses  
 zweier unvollkommen elastischer Körper von beliebiger Gestalt  
 eine Gleichung aufstellen, welche ausdrückt, dass der Verlust an  
 lebendiger Kraft sich aus zwei Teilen zusammensetzt, von wel-  
 chen der eine proportional der lebendigen Kraft der verlorenen  
 Geschwindigkeiten, d. i. dem Doppelten der im Innern erzeugten  
 Moleculararbeit, und der andere gleich dem Doppelten der durch

Reibung verbrauchten Arbeit ist. Die Auswertung dieses  
 letzten Gliedes bietet im Allgemeinen grosse Schwierigkeiten dar.

In 3) wird zunächst der Verlust an lebendiger Kraft beim  
 Zusammenstoss zweier unelastischer Körper berechnet. Es be-  
 zeichne  $m$  ein Massenmolecul der beiden Körper,  $Ov_0, Ov_1, Ou$  die  
 in einem Punkte  $O$  aus gezogenen Geraden, welche beziehungs-  
 weise die Geschwindigkeiten  $v_0$  vor dem Stosse,  $v_1$  nach dem





n. Bereits Coriolis fand, dass die Gleichungen für diesen mit einander wohl vereinbar sein würden, wenn man anme, dass die Reibung zwischen Ball und Billardfläche während Stosses dieselbe Richtung habe. Für diesen Fall werden Bewegungsgleichungen aufgestellt, aus welchen sich ergibt, die Bewegung des Ballmittelpunktes parallel zu  $Cx$  richtig oder rückläufig sein wird, je nachdem  $\cos \gamma \leq f \cot i$  ist. Hierbei bedeutet  $Cx$  die durch den Mittelpunkt  $C$  des Balles gehende Horizontale in der verticalen Ebene, welche parallel zur Queueaxe durch  $C$  geht,  $\gamma$  die auf die constante Richtung der Bewegung bezügliche Constante,  $f$  den Reibungscoefficienten für Ball auf der Billardfläche,  $i$  die Neigung der Queueaxe gegen die Billardfläche. Wenn diese Neigung nicht genügend gross ist, kann folglich keine rückläufige Bewegung eintreten.

7) Philipps schlug vor, das Problem des Stosses unvollkommen elastischer Körper dadurch zu lösen, dass angenommen wird, die Grösse der normalen gegenseitigen Wirkung im zweiten Teile des Stosses, d. h. nach dem Augenblicke, wann die letzte Zusammendrückung stattgefunden hat, sei ein Bruchteil der entsprechenden Grösse im ersten Teile des Stosses. Unter dieser Annahme behandelt der Verfasser den directen Stoss zweier Körper, welche parallele Translationsbewegungen ausführen, und gelangt zu den Formeln, welche er in 1) gegeben hat. Die Hypothese von Philipps ist durch ihre Einfachheit sehr verführerisch und der Verfasser ist geneigt, sie bei der Lösung der verschiedenen Probleme des Billardspieles, welche er schon behandelt, anzuwenden.

Rs.

LAMB. On the vibrations of an elastic sphere.  
Phil. Mag. S. Proc. XIII. 189-212.

Dieselbe Methode, welche der Verfasser in einer etwas früher veröffentlichten Mitteilung (On the Oscillations of a Viscous Spheroid. Proc. L.M.S. XIII. 51-66 s.p. 789) angewendet hat, wird hier zur Untersuchung der Schwingungen einer elastischen Kugel benutzt. Die wichtigsten der Resultate sind bereits durch Järvisch



$$i = \frac{1}{\cos \alpha} - 1, \quad f = \frac{2E\omega \sin \alpha}{\pi} (\tan \alpha - \alpha),$$

in  $\omega$  den Querschnitt,  $\rho$  den Elasticitätscoefficienten bedeutet. Die Berechnung von  $i$  und  $f$  für eine Reihe von Werten des Winkels  $\alpha$  bestätigt die Ergebnisse der Beobachtung. Je dichter das Gewebe ist, desto grösser wird bei einer gleichen Belastung die Verlängerung. Wären die Fäden des Einschlaggarns abgeknüpft, so würde die Ausdehnung eine geringere werden. Diese hängen auch von einer Deformation derselben abhängen.

Sbt.

LÉAUTÉ. Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines. C. R. XCIV. 843-845.

Die Hypothese, dass man die Componenten und Momente der äusseren Kräfte berechnen könne, wie wenn die Teile keine Deformation erführen, von der man bei der Bestimmung des Widerstandes der Baumaterialien Gebrauch macht, ist nicht mehr zulässig für die Bestandteile von Maschinen; hier hängen die Kräfte wesentlich von deren Deformation ab. Das Problem führt zur Folge dessen nicht auf einfache Quadraturen, sondern auf Differentialgleichungen, welche vom Verfasser aufgestellt werden.

Sbt.

### C. Capillarität.

VOLKMANN. Ueber die Molecularanziehung von Flüssigkeiten auf einander. Wiedemann Ann. (2) XVI. 321-335.

Es werden folgende Definitionen aufgestellt und physikalisch begründet: 1) Die Capillaritätsconstante

$$\alpha = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} H = \frac{1}{8} \pi \rho^2 \int_0^x r^2 \varphi(r) dr$$

man als Mass der Cohäsion oder der Anziehung zweier gleich-



## Capitel 2.

### Akustik und Optik.

#### A. Akustik.

**W. MATZKA.** Kritische Berechnungen der musikalischen Töne und der diatonischen Tonleitern. Prag. Abh. (6) XI. B.

Eine sehr breite, elementare Erörterung, um die Intervalle der diatonischen Tonleiter zu ermitteln. Zunächst geht der Verfasser von einer gespannten Saite aus, die er um  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$  etc. ihrer Länge verkürzt denkt. Die Verhältnisse der Schwingungszahlen der resultirenden Töne geben successive die gesuchten Intervalle. Eine zweite Art der Ermittlung stützt sich darauf, dass die einzelnen Töne durch Zahlenwerte repräsentirt werden, die Mittelwerte zwischen 1 und 2 darstellen, und deren Zähler und Nenner durch keine andern Primzahlen, als 2, 3, 5 teilbar sind. Für die Quinte und die unterhalb liegenden Töne werden die Mittelwerte so gebildet, dass die Zähler und die Nenner zweier Töne addirt werden, z. B. ergibt sich für die Quinte als Mittelwert zwischen dem Grundton  $\left(\frac{1}{1}\right)$  und der Octave  $\left(\frac{2}{1}\right)$  die Zahl  $\frac{3}{2}$  etc. An Stelle von  $\frac{1}{1}$  wird dabei nach Bedürfnis  $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$  etc. genommen. Die zwischen der Quinte  $\left(\frac{3}{2}\right)$  und der Octave  $\left(\frac{2}{1}\right)$  liegenden Mittelwerte dagegen werden nach dem Schema  $\frac{3m+2n}{2m+n}$  gebildet. Endlich wird gezeigt, wie sich auch ohne den Begriff der Mittelwerte die gesuchten Zahlen aus den der zweiten Ermittlung zu Grunde liegenden Principien finden lassen.

Wn.

## E BELTRAMI. Sulla teoria della scala diatonica.

Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 61-66.

Ist für den Grundton das Intervall der Octave bekannt  $= \frac{1}{2}$ , das der Terz und der Quinte unbekannt und resp.  $= r, s$ , so erhält man dadurch, dass man von  $s$  und von  $\frac{1}{s}$  um Terz und Quint weiter geht, für die einzelnen Töne der Tonleiter die Intervalle

$$1, 2s^2, r, \frac{1}{2s}, s, \frac{r}{2s}, rs, \frac{1}{2}.$$

Es muss dann

$$1 > 2s^2 > r > \frac{1}{2s}$$

sein. Die einfachsten rationalen Zahlen, welche diese Aufstellungen erfüllen, sind  $s = \frac{2}{3}$ ,  $r = \frac{4}{5}$ .

Wn.

## SCHNELL. Harmonische Teilung und consonirender Dreiklang. Grunert Arch. LXVIII. 219-222.

Bei dem Durdreiklang ( $c, e, g$ ) bilden die Schwingungszahlen, bei dem Molldreiklang ihre reciproken Werte (die entsprechenden Saitenlängen des Monochords) eine arithmetische Reihe erster Ordnung.

Wn.

## B. Theoretische Optik.

A. BEER. Einleitung in die höhere Optik. Zweite umgestaltete Auflage, bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig. Vieweg.

Der Bearbeiter der neuen Auflage des seit dreissig Jahren wohlbekannten Buches hat den bei der ersten Auflage verfolgten

lung der Darstellung Abschnitt für Abschnitt beibehalten und im Allgemeinen auch an dem Inhalt nur geringe Aenderungen vorgenommen. Eine völlige Umarbeitung mussten jedoch, in Berücksichtigung der neueren Literatur, die Abschnitte erfahren, welche folgende Gegenstände behandeln: Die Brechungsverhältnisse der Gase, die Frauenhofer'schen Linien, das natürliche (nicht polarisirte) Licht, die analytische Ableitung der allgemeinen Gesetze der Lichtbewegung in Krystallen (hier ist statt der Huy'schen Darstellung diejenige gewählt, über die F. d. M. II. 1880. p. 749-751 berichtet ist), das Dispersionsgesetz, die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Fortgelassen ist die in der ersten Auflage enthaltene Tabelle mit den Brechungsquotienten einfach brechender Körper und die Zusammenstellung der optischen Constanten krystallisirter Körper, weil diese Tabellen mit dem eigentlichen Zwecke des Buches in keinem Zusammenhange stehen. In einem Anhang finden sich ziemlich vollständige Literaturverzeichnisse über Doppelbrechung und Dispersion; auch der Text enthält die neue Auflage mehr, resp. genauere Literaturweise, als die frühere. Jedenfalls hat das Buch durch die geführten Aenderungen nichts von seiner Brauchbarkeit verloren. Wenn dasselbe auch nach wie vor nicht die ganze theoretische Optik behandelt, sondern einige wichtige Capitel ganz übergeht, ist es zur Einführung in das Studium jener Disciplin doch empfehlenswert.

Wn.

---

LECHER. Ueber Ausstrahlung und Absorption.

Wien. Ber. LXXXV. 441-490; Wien. Anz. 1882. 57-59; Wiedemann Ann. (2) XVII. 477-518.

Siehe Abschn. XI. Cap. 4. C.

---

KIRCHHOFF. Zur Theorie der Lichtstrahlen. Berl. Ber. 1882. 641-669.

Der vorliegende Aufsatz, dessen wesentlichen Inhalt Herr Kirchhoff schon seit Jahren in seinen Vorlesungen vorgetragen





ung von (1) ist, die nur den bekannten Continuitätsbedingungen zu genügen hat, wird in Folgendem für  $\Phi$  der Wert angenommen:

$$(4) \quad \varphi = \frac{D}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

arin ist  $r_1$  die Entfernung des Punktes  $x, y, z$  von einem festen Punkte  $x_1, y_1, z_1$ ,  $D$  und  $D'$  hängen von der Richtung der Linie ab, sind aber im Uebrigen constant. Man kommt auf den Ausdruck (4), wenn man die bekannte particuläre Lösung von (1), welche einfache Kugelwellen darstellt, einmal oder mehrmals nach  $t$  differentiirt und dabei  $\lambda$  als eine kleine Grösse betrachtet, deren höhere Potenzen zu vernachlässigen sind. Ein Punkt 1 mit den Coordinaten  $x_1, y_1, z_1$ , welcher transversale Wellen von der Art aussendet, dass die einzelnen Componenten die Form (4) haben, wird als leuchtender Punkt bezeichnet und im Weiteren stets als Lichtquelle angesehen. Es wird nun der Wert des in

vorkommenden  $\int ds \Omega$ , ausgedehnt über eine begrenzte Fläche

abgeleitet für den Fall, dass die Function  $\Phi$  durch  $\varphi$  ersetzt wird, wobei zunächst  $D = 1$ ,  $D' = 0$  gesetzt, nachher  $D$  als in beliebiger Weise von der Richtung abhängig angenommen wird. Wenn  $\lambda$  unendlich klein ist, wenn ferner für keinen endlichen Theil der Fläche  $s$  oder ihrer Grenze  $r_1 + r_0$  constant ist, wenn endlich die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht durch die Grenze der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbeigehet, so verschwindet jenes Integral, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Fläche  $s$  nicht schneidet; dagegen hat das Integral den Wert  $\pm 4\pi \varphi_0$ , wenn ein solches Schneiden stattfindet. Dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem die Normale  $N$  in dem Schnittpunkte einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet.

Nach diesen Vorbereitungen (§§ 1-3) wird untersucht, wie das von einem leuchtenden Punkte 1 ausgehende Licht durch einen undurchsichtigen Körper modificirt wird. Zunächst wird (§ 4) der Fall betrachtet, dass jener Körper völlig schwarz ist, also Licht nicht reflectirt, noch hindurchlässt. Es wird erörtert, welche

man kann diese als eine Folge davon ansehen, dass zwischen den Verrückungen der Aetherteilchen in beiden Mitteln und deren Differentialquotienten, beide auf Punkte der Grenze bezogen, lineare homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten bestehen. Unter Benutzung der obigen Hülfsätze ergeben sich daraus die Gesetze der Reflexion von Strahlen der Form (4) an beliebigen Flächen. Die analoge Betrachtung für die Brechung ist nicht ausgeführt, würde sich aber in derselben Weise erledigen lassen.

Wn.

. FRÖHLICH. Experimentaluntersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XV. 576-613.

Die Arbeit beginnt mit einem experimentellen Teile, in dem gezeigt wird, dass die beobachteten Intensitäten der Hauptmaxima mit der gewöhnlichen Beugungstheorie in Widerspruch stehen. daran schliesst sich eine theoretische Erörterung zur Aufklärung dieses Widerspruchs. Zu dem Zwecke wird nach dem Vorgange von Kirchhoff mit Hülfe des Green'schen Satzes der Schwingungsstand in einem beliebigen Punkte eines allseitig begrenzten Raumes ausgedrückt durch den Schwingungszustand an der Grenze, resp. dessen Differentialquotienten nach der Normale. Der so gefundene Ausdruck wird angewandt auf den Fall, dass der betrachtete Punkt von der Lichtquelle durch ein Gitter getrennt ist. Dabei wird die Voraussetzung gemacht, dass Kugelwellen, die das Gitter treffen, dort eine sehr schnelle Aenderung der Amplitude und Phase erleiden. Diese Aenderung denkt der Verfasser durch eine Fourier'sche Reihe ausgedrückt, deren unbestimmte Coefficienten auch in dem schliesslichen Ausdruck für die Lichtintensität des betrachteten Punktes auftreten. Vergleicht man diesen Intensitätsausdruck mit den Beobachtungen, so findet man was wohl von vorn herein zu vermuten, dass von jenen unbestimmten Coefficienten so viele berechnet werden können, als Beobachtungsdata vorliegen, dass man daher unendlich viele verschiedene Functionen für die oben genannten Aenderungen

*d. Math. XIV. 2.*



Folge dieser Fassung des Problems ist die weitere Behandlung desselben in ebenso einfacher Weise möglich, wie bei den gewöhnlichen Beugungserscheinungen. Ebenso wie bei diesen giebt sich der Ausdruck für die Intensität in einem beliebigen Punkte, ein Ausdruck, der dann durch die üblichen vereinfachenden Annahmen weiter reducirt wird. Dadurch wird die Betrachtung der complicirten, den Bessel'schen Functionen verwandten transcendente, auf die Herr Weber das Problem zurückgeführt war, überflüssig. Statt dieser Transcendente treten hier vielmehr, und das ist eine wesentliche Vereinfachung, in dem Ausdruck für die Lichtintensität die beiden Functionen

$$M(v) = \int_0^\infty \cos(\xi^2 - v^2) d\xi, \quad N(v) = \int_0^\infty \sin(\xi^2 - v^2) d\xi$$

welche mit den gewöhnlichen Fresnel'schen Integralen durch einfache Relationen zusammenhängen, sich aber vor denselben dadurch auszeichnen, dass sie für positive Argumente  $v$  keine periodische, sondern eine stetige Abnahme besitzen. Dies wird aus abgeleitet, dass für positive Argumente  $v$  jene Functionen die Form gebracht werden können:

$$M(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-v^2 x^2} dx}{1+x^4}, \quad N(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-v^2 x^2} dx}{1+x^4}.$$

weiter folgen aus dieser Form unmittelbar die Cauchy'schen uniconvergenten Reihen zur Berechnung von  $M$  und  $N$  für positive  $v$ , während die Functionswerte für negative Argumente mit jenen für positive Argumente durch die Relationen zusammenhängen:

$$M(-v) = \sqrt{\pi} \sin\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - M(v),$$

$$N(-v) = \sqrt{\pi} \cos\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(v).$$

Die besprochenen Eigenschaften der Functionen  $M$  und  $N$  benutzt sich die Discussion des Intensitätsausdrucks; und aus dieser Discussion ergeben sich nicht nur die Weber'schen Resultate, sondern auch Verallgemeinerungen derselben, die darin bestehen,



In der ersten der beiden Arbeiten, die dem Referenten nicht zugänglich war, hat der Verfasser, wie er im Eingang der zweiten Arbeit erwähnt, unter anderem die Intensitätsverteilung in der Focalebene eines Fernrohrs für den besonderen Fall untersucht, dass das geometrische Focalbild der Lichtscheibe geradlinig begrenzt ist und in allen Teilen dieselbe spezifische Intensität besitzt. Die Aufgabe führte auf die Bestimmung eines Doppelintegrals der Bessel'schen Function  $J_1(z)$  und wurde mit Hilfe von Reihenentwickelungen ausgeführt. Dieselbe Aufgabe wird in der zweiten Arbeit auf directerem Wege und in einfacher Form gelöst. Aus dem bekannten Ausdruck für die Intensität, welche ein Lichtpunkt bei der Beugung durch die kreisförmige Oeffnung des Fernrohrs in einem beliebigen Punkte der Focalebene hervorbringt, ergibt sich durch Integration für die von einer Lichtlinie herrührende Intensität ein Ausdruck von folgender Form

$$(1) \quad I = C \int_0^x \frac{[J_1(x)]^2 dx}{x \sqrt{x^2 - z^2}}.$$

Durch verschiedene Umformungen, bei denen neben anderen bekannten Formeln die Neumann'sche Darstellung von  $[J_1(x)]^2$  durch ein Integral von  $J_2(x)$ , sowie das Mehler'sche Integral für  $J_1(x)$  (cf. F. d. M. IV. 1872. p. 227) benutzt werden, gelangt man zu dem Resultate:

$$(2) \quad I = \frac{3}{8} \pi \frac{H_1(2z)}{z^3},$$

•

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \beta) \cos^2 \beta d\beta$$

neben mit den Bessel'schen Functionen nahe verwandte Functionen. Für  $H_1(z)$  wird noch eine andere Integraldarstellung mitgeteilt, ferner eine convergente und eine semiconvergente Reihenentwickelung, endlich eine Recursionsformel, die  $H_1(z)$  mit der Function

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin \beta) d\beta$$





unterscheidet nämlich in Bezug auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwei verschiedene Begriffe, 1) die individuelle Geschwindigkeit einer einzelnen Welle, die  $= \frac{\lambda}{T}$  ist, wenn  $\lambda$  die Wellenlänge,  $T$  die Vibrationsdauer; 2) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtintensität bei dem Zusammenwirken einer Zahl Wellen, die zusammen nahezu homogenes Licht ergeben. Es soll

$$= \frac{\lambda}{T} - \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}$$

Es wird dies folgendermassen begründet. Die Bewegung, die eine einzelne ebene Welle von der Fortpflanzungsrichtung hervorbringt, sei dargestellt durch die Gleichung

$$(1) \quad \eta = A \sin(Kx - St) + B \cos(Kx - St),$$

sei zwischen den Constanten  $S$  und  $K$  eine Gleichung von Form

$$(2) \quad S = F(K)$$

findet. Wirken unzählig viele ebene Wellen mit verschiedenen  $K$  zu gleicher Zeit, so ist die Verrückung eines Punktes

$$(3) \quad \eta = \int_0^\infty \{ \varphi_1(K) \sin(Kx - St) + \varphi_2(K) \cos(Kx - St) \} dK;$$

Functionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind durch den Anfangszustand des Mediums bestimmt. Die durch (3) dargestellte Lichtbewegung ergibt nahezu homogenes Licht, wenn die Functionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  alle Werte von  $K$  verschwinden, ausser für solche  $K$ , die zwischen  $K_0 - \varepsilon$  und  $K_0 + \varepsilon$  liegen, unter  $\varepsilon$  eine kleine Grösse verstanden. Unter der Voraussetzung, dass diese Bedingung existiert, wird die Gleichung (3) in die Form gebracht

$$(4) \quad \eta = \mathfrak{F}(x, t) \sin[K_0 x - S_0 t + \chi(x, t)].$$

hierdurch repräsentirte Bewegung, deren Intensität

$$(5) \quad I = \frac{1}{2dt} \int_{t-dt}^{t+dt} \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 dt$$

wird gedeutet als eine Wellenbewegung mit veränderlicher



nt hält die Resultate der Arbeit noch immer für unan-  
ar, die oben skizzirte Begründung für nicht stichhaltig.

Wn.

MMEL. Theorie der elliptischen Doppelbrechung.

demann Ann. (2) XV. 378-390.

ie Grundlage der Untersuchung bilden, abgesehen von ge-  
hier angebrachten Modificationen, die Gleichungen, von  
der Verfasser in seiner Theorie der Doppelbrechung aus-  
gen war (cfr. F. d. M. X. 1878. 696). Die Modificationen  
en darin, dass 1) die Gleichungen nicht auf die Haupt-  
tätsaxen bezogen werden, sondern auf solche Axen, dass  
Fortpflanzungsrichtung ist, und dass 2) jeder der beiden  
ngen für die Bewegung der ponderablen Molecüle noch  
satzglied hinzugefügt ist, herrührend von dem schrauben-  
en Bau der Molecüle, während die Gleichungen für die  
ung der Aethermolecüle ungeändert bleiben. Die eben  
ten Zusatzglieder sind von derselben Form, wie in der  
igen Bande des Jahrbuchs besprochenen Arbeit des Ver-  
(cfr. F. d. M. XIII. 1881. p. 751). Für die Componenten  
hwingungen der Aether- und Körpertheilchen wird der  
ick

$$l = e^{-\left(K + \frac{q}{c}i\right)z + qit}$$

ommen, je mit einer Constanten multiplicirt, und es wird  
untersucht, unter welchen Bedingungen diese Ausdrücke  
igen Grundgleichungen genügen. Es ergiebt sich, dass  
bewegungen der Aethermolecüle in zwei entgegengesetzt  
ch polarisirten Wellen bestehen, deren Bahnellipsen ein-  
ähnlich, aber um einen rechten Winkel gegen einander  
t sind, und die mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort-  
en. Weiter werden die Ausdrücke für die Axenrichtungen,  
kenverhältnis der Ellipsen, der Phasenunterschied beider  
etc. genauer discutirt und mit Beobachtungen von Jamin  
ben.

Wn.



binzugefügt werden, wie sie von Lommel (cf. F. d. M. XIII. . p. 751) benutzt sind. Fällt die  $z$ -Axe mit dem Lichtstrable mmen, so ergibt das sogenannte Gesetz der Verwandlung Schwingungsarbeit des Aethers die Gleichungen

$$I) \quad \begin{cases} m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta s + \Sigma m' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} \delta s' = e \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \delta s, \\ m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta s + \Sigma m' \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t'^2} \delta s' = e \left( \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right) \delta s, \end{cases}$$

und das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit der ularkräfte der Körperteilchen für jede einzelne Molecular- tät Gleichungen der Form ergibt:

$$I) \quad \begin{cases} m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \delta \xi + m' \frac{\partial^2 \xi'}{\partial t'^2} \delta \xi' \\ \quad = - \left( \kappa \xi' + \gamma \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right) \delta \xi' - \left( \mathfrak{f} \eta' + \mathfrak{g} \frac{\partial \eta'}{\partial t} \right) \delta \xi', \\ m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \delta \eta + m' \frac{\partial^2 \eta'}{\partial t'^2} \delta \eta' \\ \quad = - \left( \kappa \eta' + \gamma \frac{\partial \eta'}{\partial t} \right) \delta \eta' + \left( \mathfrak{f} \xi' + \mathfrak{g} \frac{\partial \xi'}{\partial t} \right) \delta \eta'. \end{cases}$$

$\xi, \eta$  bedeuten  $\xi, \eta$  die Schwingungscomponenten der Aether-, die der Körperteilchen,  $m, m'$  ihre Massen. Die Grössen  $\kappa, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$  sind Constanten. Endlich bedeuten  $\delta s, \delta s', \delta \xi, \delta \xi'$  kleine ickungen, deren resp. Verhältnisse als für das Mittel charak- isch gleichfalls als gegeben vorausgesetzt werden. Die vier, onstanten  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$  enthaltenden Glieder sind zu den früheren hungen des Verfassers neu hinzugetreten. Es wird nun sucht, unter welchen Bedingungen man den Gleichungen II), (denen nach des Referenten Ansicht eine genügende aniche Begründung bisher noch fehlt) genügen kann durch

$$(III) \quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} b z} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{a z}{\lambda} \right) \right], \\ \eta = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} b z} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{a z}{\lambda} \right) \right], \\ \xi' = \mathfrak{A}'_x e^{\frac{2\pi}{\lambda} b z} \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{a z}{\lambda} \right) - A_x \right], \\ \eta' = \mathfrak{A}'_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} b z} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{a z}{\lambda} \right) - A_y \right]. \end{cases}$$

















1. HAMMERL. Ueber Regenbogen, gebildet durch Flüssigkeiten von verschiedenen Brechungsexponenten.

Wien. Ber. LXXXVI. 206-215.

Der theoretische Teil der Arbeit ist nur eine Reproduktion der bekannten Newton'schen Theorie, wie man sie in den meisten physikalischen Lehrbüchern findet. Wn.

2. DELSAUX. Sur la théorie de l'arc en ciel. Brux. S. sc. VI. B. 9-16.

Vereinfachung der Theorie von Airy. Mn. (O.).

3. MOSER. Die Grundformeln der Dioptrik für den praktischen Gebrauch entwickelt. Prag. Ber. 1881. 141-166.

Die wichtigsten und bekanntesten Sätze der Linsentheorie werden abgeleitet, ohne dass irgend welche neuen Resultate oder neuen Gesichtspunkte dabei zu Tage treten. Den Ausgangspunkt bildet für die Brechung an einer einzelnen Kugelfläche die Betrachtung des Doppelverhältnisses folgender vier Strahlen: Einfallender Strahl, gebrochener Strahl, Einfallslot, Einfallstangente. Hieraus ergibt sich das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit einem in ihrer Ebene liegenden, ungebrochen durch die Kugelfläche gehenden Strahle, und weiter folgen Beziehungen zwischen den Coordinaten jener Schnittpunkte. Diese werden benutzt, um die bekannten Sätze über die Brechung centraler Strahlen aufzustellen, während der weitere Gang in allem Wesentlichen der übliche ist. Ein Schlussabschnitt behandelt die sphärische Abweichung, entwickelt aber auch lediglich bekannte Resultate.

Wn.

4. KESSLER. Ueber den Ersatz eines centrirten Systems brechender Kugelflächen durch eine einzige dieser Art.

Wiedemann Ann. (2) XVI. 362-366.

Eine Linse kann, was die Lage ihrer conjugirten Punkte









1. **WIEDEMANN.** Die Lehre von der Elektrizität. Braunschweig. 1882. Band I.

Bei Herstellung der dritten Auflage des bekannten Handbuchs des Galvanismus und Elektromagnetismus ist dasselbe zu einem Werke umgearbeitet worden, welches jetzt die ganze Elektrizitätslehre umfasst. Der vorliegende erste Band enthält ausser einer historischen Einleitung die Grundbegriffe der Elektrostatik, die Elektrizitätserregung durch Contact und die Gesetze der constanten Ströme. Ueber das Verhältniss des Werkes zur mathematischen Theorie sagt der Verfasser in dem Vorwort: „Auf die mathematische Behandlung des Gegenstandes bin ich so weit eingegangen, als ihr Schwerpunkt in der Physik liegt, so weit sie so zur Feststellung der allgemeinen Principien und zur Discussion der Methoden und Begründung ihrer Resultate dient.“

Ok.

2. **CLAUSIUS.** Ueber die verschiedenen Maasssysteme zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen. Verh. d. naturh. Ver. f. Rheinl. und Westf. XXXIX., Wiedemann Ann. (2) XVI. 529-551.

3. **HELMHOLTZ.** Ueber absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen. Wiedemann Ann. (2) XVII. 42-55.

4. **CLAUSIUS.** Ueber den Zusammenhang zwischen den Einheiten der Elektrizität und des Magnetismus. Wiedemann Ann. (2) XVII. 713-719.

Bekanntlich bedient man sich bei der Zurückführung elektrischer und magnetischer Grössen auf absolutes Mass entweder des elektrostatischen oder des elektromagnetischen Masssystems. In dem ersten bildet die Elektrizitätsmenge den Ausgangspunkt, welche gemessen wird durch die Kraftwirkung, welche sie auf eine andere Elektrizitätsmenge ausübt. In ganz ähnlicher Weise geht das andere Masssystem von der Menge des Magnetismus aus. Während die Ableitung aller Grössen nach dem zweiten Mass-



**P. VOLKMANN.** Zum absoluten Masssystem. Wiedemann Ann. (2) XVI. 481-489.

Der Verfasser schlägt zur besseren Veranschaulichung der elektrischen Grössen eine veränderte Fassung der Definition der Einheit der Elektrizitätsmenge vor. Er definirt dieselbe derart, dass sie mit einer ponderablen Masse gleiche Dimension hat.

Daraus folgen andere Dimensionen für die übrigen Fundamentalgrössen, als man denselben gewöhnlich giebt.

Ok.

**A. LEDIEU.** Objections d'ordre mécanique à la théorie actuelle de l'électricité. C. R. XCV. 619-623.

**A. LEDIEU.** Conception rationnelle de la nature et de la propagation de l'électricité. C. R. XCV. 669-673, 753-757.

**C. DECHARME.** Conclusions des expériences hydrodynamiques d'imitation des phénomènes d'électricité et de magnétisme. Réponse à une Note de M. Ledieu. C. R. XCV. 913-914.

**A. LEDIEU.** Réponse aux objections de M. Decharme sur ma conception rationnelle de la nature de l'électricité. C. R. XCV. 1026-1030.

**C. DECHARME.** Réponse à M. Ledieu, au sujet des analogies entre les phénomènes hydrodynamiques et électriques. C. R. XCV. 1273-1275.

Ledieu hebt die Schwierigkeiten hervor, welche in der Auffassung eines elektrischen Stromes als Flüssigkeitsstrom oder als Doppelstrom vom Standpunkt der Mechanik aus liegen. Dieselben sind indess nicht neu und auch von anderen Seiten schon präziser ausgesprochen worden. Nachdem in der zweiten Mitteilung die verschiedenen in der Elektrizitätslehre vorkommenden Grössen, besonders in ihren Beziehungen zu den absoluten Masssystemen besprochen worden sind, setzt der Verfasser in der dritten Mitteilung seine eigene Theorie auseinander. Die-



hen Farbenringen. Wie man aus den angeführten Beispielen  
 ar Genüge erkennt, sind die Aehnlichkeiten zwischen den beiden  
 rscheinungsgruppen rein äusserliche und jedenfalls in keiner  
 Weise geeignet, irgend eine Aufklärung über elektrische und  
 magnetische Phänomene zu geben. Ok.

**L. A. LORENTZ.** De grondformules der electrodynamica.

Versl. en Meded. XVII. 144-161; Arch. Néerl. XVII. 83-100

Einige Betrachtungen über die Grundformeln der Elektro-  
 dynamik, welche durch die Abhandlungen Korteweg's über den-  
 elben Gegenstand angeregt sind (s. F. d. M. XII. 1880. 783).  
 Es wird hier ein einfacherer Weg eingeschlagen, um zu den  
 ort erlangten Resultaten zu kommen, und es werden nicht mehr  
 unbekannte Functionen eingeführt, als zum Endergebnis bestehen  
 bleiben. Zuerst wird dargetan, auf welche Weise aus den Beob-  
 achtungen die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises auf  
 ein unvollständiges Stromelement abgeleitet werden kann, ohne  
 von einer Formel für die Wirkung zweier Stromelemente auf  
 einander Gebrauch zu machen. Hieraus werden sodann die all-  
 gemeinen Ausdrücke für die Wirkungen zweier Stromelemente  
 auf einander aufgestellt, welche dem Grassmann'schen Gesetze  
 genügen. Auch die secundäre Wirkung wird bestimmt und da-  
 bei von der Hypothese der Spiegelbilder Gebrauch gemacht,  
 wodurch sich Ausdrücke für die allgemeinste Wirkung, die  
 zwischen zwei Stromelementen angenommen werden kann, er-  
 geben, welche drei unbekannte Functionen enthalten. Diese  
 werden auf nur eine zurückgeführt, wenn man die Bedingung  
 einführt, dass Wirkung und Gegenwirkung gleich und entgegen-  
 gesetzt sind. Schliesslich wird die Uebereinstimmung dieser Re-  
 sultate mit denen Korteweg's nachgewiesen. G.

**M. LÉVY.** Sur le mouvement d'un système de deux  
 particules de matière pondérable électrisées et sur  
 l'intégration d'une classe d'équations à dérivées par-  
 tielles. C. R. XCV. 956-988.



**F. MACHAL.** Sur quelques théorèmes d'électricité, démontrés d'une manière inexacte dans les ouvrages didactiques. C. R. XCV. 210-213.

Die betreffenden Lehrsätze befinden sich in den Handbüchern von Maxwell und von Mascart und Joubert. Der erste Satz bezieht sich auf einen Punkt in einem elektrischen Kraftfeld, für welches die partielle Differentialgleichung:

$$\Delta V = 0$$

gilt. Legt man durch den Punkt eine Tangentialebene und wählt das Coordinatensystem so, dass die Normale derselben der  $z$ -Achse parallel ist, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{F}{R_x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{F}{R_y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -F \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) = -F \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

während Mascart die drei zweiten Differentialquotienten einzeln gleich Null setzt. Hier ist  $F$  die wirksame Kraft,  $R_x$  und  $R_y$  sind die Krümmungsradien der Normalschnitte der Niveaufläche. Bei einem zweiten Satz wird nur eine Verbesserung des Beweises, bei einem dritten (dem Earnshaw'schen Satz) ein correcterer Ausdruck gegeben. Ok.

**E. BELTRAMI.** Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizzati. Rend. Ist. Lomb. (2) XIV. 400-407.

Bezeichnet man mit  $L$  die Potentialwerte einer Reihe von Conductoren, welche mit den Elektrizitätsmengen  $M$  geladen sind, so ist das Potential des ganzen Systems auf sich selbst:

$$P = \frac{1}{2} \Sigma LM.$$

Verändert man die Ladungen und die Potentialwerte, so ist hierzu eine äussere Arbeit nötig, deren Ausdruck:

$$dQ = \frac{1}{2} \Sigma (LdM - MdL).$$





**W. D. NIVEN.** On a method of approximating to the solution of electrostatic problems. Quart. J. XVIII. 266-270.

Wird in die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

~~An~~statt  $v$  die Coordinate  $z$  als abhängige Variable eingeführt, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left\{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\} - 2 \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial v}\right) = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich erheblich, wenn die Differentialquotienten von  $z$  nach  $x$  und  $y$  so klein sind, dass ihre Quadrate und Producte vernachlässigt werden können. Der Verfasser macht hiervon eine Anwendung auf die Verteilung der Elektrizität auf einem Condensator, bei welchem die belegten Flächen nur wenig von zwei parallelen Ebenen abweichen. In ähnlicher Weise kann man in die auf Polarcoordinaten bezogene Gleichung an Stelle des Radius vector  $v$  einführen. Diese Transformation wird benutzt, um die Elektrizitätsverteilung auf einem nahezu kugelförmigen Conductor zu berechnen. Ok.

**R. COLLEY.** Ueber die Existenz einer diëlektrischen Polarisation in Electrolyten. Wiedemann Ann. (2) XV. 94-112.

Wenn ein galvanischer Stromkreis eine Flüssigkeitszelle enthält, so findet an den Elektroden eine Potentialdifferenz statt, entsprechend der elektromotorischen Kraft der Polarisation. Man muss hierbei das Vorhandensein von je zwei sehr nahen, elektrischen Doppelschichten an den Elektrodenflächen annehmen. Bestehen letztere aus grossen, einander parallelen Platten, sieht man ferner die Flüssigkeit als diëlektrisch an, so bilden die beiden Elektroden ausserdem noch einen Condensator gewöhnlicher Art. Der Verfasser untersucht nun theoretisch und experimentell den Verlauf eines Ladungs- und eines Entladungs-



Die Fragen, welche noch als offen zu betrachten sind. Eine besondere Schwierigkeit bereitet zunächst die Tatsache, dass der Strom stationär ist, obgleich fortdauernd eine beschleunigende Kraft auf denselben wirkt. Man ist dabei gezwungen, einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand einzuführen. Ferner bleibt unentschieden, ob die Elektrizität als compressibles oder incompressibles Fluidum anzusehen ist. Endlich ist fraglich, ob die an der Oberfläche der Leiter befindliche freie Elektrizität an der Strömung teilnimmt. Obgleich der Verfasser keine endgültige Entscheidung dieser Fragen zu geben vermag, so ist es doch von Interesse, dass derselbe auf diese Lücken der bisherigen Theorie hingewiesen hat. Ok.

R. COLLEY. Ueber die in einem geschlossenen Stromkreise geleistete Arbeit äusserer Kräfte. Wiedemann Ann. (2) XVI. 39-56.

Der Verfasser weist nach, dass die durch einen galvanischen Strom geleistete mechanische oder chemische Arbeit eine electromotorische Gegenkraft in dem Stromkreis bedingt. Ok.

G. LIPPMANN. Sur la théorie des couches doubles de M. Helmholtz. Calcul de la grandeur d'un intervalle moléculaire. C. R. XCV. 686-689.

Wenn das elektrische Potential auf beiden Seiten der Berührungsfläche heterogener Substanzen verschiedene Werte hat, so muss man annehmen, dass in der Berührungsfläche eine elektrische Doppelschicht sich befindet. Die Entfernung der beiden Schichten kann als Entfernung der Moleküle der einen und der anderen Substanz angesehen werden. Der Verfasser hat zur Erklärung früherer electrocapillarer Versuche (Annales de chimie et de phys. 1875) die Gleichung aufgestellt:

$$X = - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$



Der Verfasser bespricht den Zusammenhang zwischen dem Problem der conformen Abbildung zweier Ebenen, resp. einer Ebene auf eine Kugeloberfläche und der Theorie der stationären, elektrischen Strömung und giebt hierzu eine grössere Anzahl von Beispielen, bei denen er die isoëlektrischen und die Strömungskurven berechnet und construirt. Ok.

7. VOIGT. Theorie der electrochemischen Experimente des Herrn Guébhard. Wiedemann Ann. (2) XVII. 257-272.

8. MACH. Ueber Herrn A. Guébhard's Darstellung der Aequipotentialcurven. Wien. Ber. LXXXVI. 8-14, Wiedemann Ann. (2) 858-865.

9. MEYER. Ueber die von Guébhard vorgeschlagene Methode der Darstellung aequipotentialer Linien. Gött. Nachr. 1881. 666-676.

Weitere Discussion der in F. d. M. XII. 1880. 796 beschriebenen Versuche. Die drei Physiker, deren Arbeiten oben angegeben sind, stimmen mit der damals auch schon von dem Referenten geäusserten Ansicht überein, dass es sich bei den Guébhard'schen Farbencurven nur um eine in einzelnen Specialfällen stattfindende Aehnlichkeit mit den Curven gleichen Potentials handeln kann. Diese Ansicht wird von W. Voigt theoretisch begründet, welcher die Formeln neben einander stellt, welche in dem Fall einer reinen Horizontalströmung in der Platte und einer Strömung in der Flüssigkeit mit partiellem Uebergang in die Metallplatte gelten. Die Guébhard'schen Curven sind danach complicirtere Fälle der Nobili'schen Ringe, d. h. Curven gleicher Stromintensität. Die Berechnung derselben gelingt nur unter einfachen Annahmen. Für den Fall von zwei punktförmigen Elektroden von entgegengesetztem Zeichen würde den Guébhard'schen Curven die Gleichung:

$$K = \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2},$$



b) wenn die Metallplatte sehr dünn ist,

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \text{const.}$$

Der Verfasser discutirt beide Resultate unter der allgemeinen Annahme, dass es sich um ebene Curven handelt, deren Gleichung durch

$$\frac{1}{\varrho_1^n} - \frac{1}{\varrho_2^n} = \text{const.}$$

ausgedrückt ist.

Es werden auch noch andere Fälle behandelt, welche den Guébhard'schen Versuchen entsprechen, wobei der Verfasser zu dem Resultat kommt, dass dieselben im Allgemeinen vollständig durch die Theorie erklärt werden, dass ferner zwischen den Guébhard'schen Curven und den Curven gleichen Potentials zwar eine gewisse Aehnlichkeit besteht, aber von einer Identität beider keine Rede sein kann. Ok.

A. WITKOWSKI. Ueber den Einfluss der Deformation auf die elektrische Leitungsfähigkeit. Wiedemann Ann. (2) XVI. 161-166.

Wird ein homogener Leiter durch allseitigen Druck comprimirt, so dass sein Volumen im Verhältniss  $\frac{1}{1-\vartheta}$  verkleinert wird, so wächst seine Leitungsfähigkeit im Verhältniss  $\frac{1}{1+\varrho\vartheta}$ , wo  $\varrho$  eine für den Leiter charakteristische Constante ist. Tritt eine Verlängerung eines Leiters um  $\frac{\alpha}{2}$  in einer Richtung und eine entsprechende Compression in einer dazu senkrechten Richtung ein, so nimmt die Leitungsfähigkeit im Verhältniss  $\frac{1}{1-\sigma\alpha}$  in der ersten Richtung ab, und im Verhältniss  $\frac{1}{1+\sigma\alpha}$  in der zweiten zu.

Der Verfasser hat nach Methoden, welche W. Thomson an-





wo  $t = \sin \operatorname{am}(u, k)$  gesetzt ist. Zur Berechnung der übrigen Grössen dienen die Gleichungen:

$$\frac{\pi\beta}{2K} = \gamma, \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}},$$

$$\frac{c}{a} = \operatorname{tg} \gamma - 4 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^m q^m \sin(2m\gamma)}{1 - q^m},$$

$$\log \frac{1}{q} = \frac{b}{c} \pi + 4\gamma \frac{a}{c}.$$

Für den Widerstand des Leiterstücks mit Rücksicht auf die Zweigleitung  $BC$  erhält man schliesslich den angenäherten Ausdruck:

$$P = \frac{2}{\pi\lambda\varepsilon} \cdot \lg \frac{1}{\sqrt[4]{q} \cdot \sin \operatorname{am} \beta}.$$

In demselben bedeutet  $\lambda$  die Leitungsfähigkeit,  $\varepsilon$  die Dicke der Quecksilberschicht. Die Grössen  $q$  und  $\beta$  hängen von den horizontalen Dimensionen der Schicht ab, indem  $c$  die Breite und  $b$  die Länge des Querstreifens,  $a$  die Breite der beiden Längsstreifen bedeutet. Ok.

E. DORN. Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass. Wiedemann Ann. (2) XVII. 773-816.

Die von dem Verfasser benutzte Methode ist als eine Modification der Dämpfungsmethode von W. Weber anzusehen. Versetzt man den Magnet eines Galvanometers in Schwingungen und beobachtet Schwingungsdauer ( $T_0$  und  $T$ ) und logarithmisches Decrement ( $\lambda_0$  und  $\lambda$ ) bei offenen und bei geschlossenen Galvanometerrollen, so hängt der Widerstand  $w$  des Kreises mit diesen Grössen durch die Formel

$$q^2 = 2wK \left\{ \frac{\lambda}{T} - \frac{\lambda_0}{T_0} \right\}$$

zusammen. Hierin bedeutet noch  $K$  das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, und  $q$  das Drehungsmoment der Rollen, auf den Magnet, wenn dieselben vom Strom 1 durchflossen werden.



elche durch die in der Rolle entstehenden Inductionsströme ablenkt wird. Der Verfasser entwickelt zunächst die allgemeinen Formeln, welche bei der Ausführung eines solchen Versuches verwenden sind, indem er annimmt, dass die Rotationsaxe der Rolle einen beliebigen Winkel mit der magnetischen Axe der Nadel bildet. Es ergiebt sich aus dieser Rechnung, dass es am zweckmässigsten ist, die Rolle um eine horizontale Axe rotiren zu lassen, welche fortdauernd mit der Nadelaxe zusammenfällt. Bei dieser Anordnung werden in der Rolle Ströme nur durch die Verticalcomponente des Erdmagnetismus und durch gegenseitige Induction der Windungen auf einander, nicht aber durch die Nadel inducirt. Die Berücksichtigung der erwähnten Selbstinduction bereitet bei solchen Versuchen die Hauptschwierigkeit. Die Berechnung des Inductionscoefficienten der Rolle nach Formeln von Maxwell liefert wesentlich andere Werte, als der Versuch. Die getroffene Versuchsanordnung wird auf die Bestimmung eines Widerstandes nach absolutem Maass angewandt. Der Verfasser hat hierzu einen Etalon der British Association gewählt und findet für denselben:

$$0,9877 \cdot 10^{10} \frac{\text{Millimeter.}}{\text{Secunde}}.$$

Ok.

DORN. Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode. Wiedemann Ann. (2) XVII. 654-673.

Werden auf eine in Schwingung befindliche Magnetnadel in dem Augenblick ihres Durchgangs durch die Gleichgewichtslage Stösse durch momentane Inductionsströme ausgeführt, so nähern sich die beobachteten Ausschläge bei Fortsetzung dieses Verfahrens nach einiger Zeit einem gewissen Grenzwerte. Aus demselben erhält man ein Maass für die Stärke der angewandten Inductionsstösse.

Die Ausdrücke, nach denen dieselben aus den Ablenkungen berechnet werden können, werden gewöhnlich unter der Voraussetzung entwickelt, dass die Inductionsstösse genau im Augen-



**M. BRILLOUIN.** Comparaison des coefficients d'induction.  
Ann. d. l'Éc. N. (2) VI. p. 339-425, C. R. XCIV. 436-437.

Die umfangreiche Abhandlung enthält eine experimentelle Prüfung verschiedener von Maxwell (Treatise on electricity II. 355-357) angegebenen Methoden, die Inductionscoefficienten von Rollen zu prüfen. Hierbei kann es sich handeln entweder um die Inductionswirkung einer Rolle auf eine zweite, wenn durch erstere ein Strom geleitet wird, oder um die Selbstinduction einer Rolle, bei Oeffnung und Schliessung eines durch dieselbe fließenden Stromes. Man kann daher vergleichen:

- 1) Die gegenseitigen Inductionscoefficienten zweier Rollenpaare,
- 2) die Selbstinductionscoefficienten zweier Rollen,
- 3) einen Coefficienten der ersten und der zweiten Art.

Eine eingehendere Besprechung der hierbei angewandten Methoden dürfte hier nicht am Orte sein. Wir wollen daher nur kurz erwähnen, dass die beiden letzten Bestimmungen durch eine Wheatstone-Brückenordnung ausgeführt werden, bei welcher durch passende Widerstandsbestimmung der Brückendraht nicht allein bei einem constanten Strom, sondern auch bei Oeffnung und Schliessung desselben stromlos bleibt. Die Berechnung der in Frage kommenden Coefficienten geschieht nach den schon von Maxwell gegebenen Formeln. Eine nicht unwichtige Fehlerquelle hat der Verfasser ausführlicher untersucht. Dieselbe besteht in der Eigenschaft enggewundener Rollen, als Condensatoren zu wirken. Der Einfluss dieser Erscheinung auf die Bestimmung der Inductionscoefficienten wird in dem letzten Abschnitt der Abhandlung erörtert.

Ok.

---

**A. OBERBECK.** Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen. Berl. Ber. 1882. 125-131, 1065-1074.

**A. OBERBECK.** Ueber elektrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen. Wiedemann Ann. (2) XVII. 816-841, 1040-1042.

Durch Versuche mit schnell wechselnden elektrischen Strö-



en. Diese Formeln werden durch Versuche geprüft, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.

In der zweiten Abhandlung wird eine directere Methode beschrieben, zwei elektrische Schwingungen mit Phasenunterschieden herzustellen. Ein Magnet wird in schnelle Rotation versetzt, während derselbe sich im Innern zweier Drahtrollen befindet, welche gegen einander um die Rotationsaxe des Magnets drehen werden können.

Eine einfache Rechnung liefert Formeln für den Verlauf der inducirten Wechselströme. Aus denselben ergibt sich zuerst eine neue Methode, Inductionscoefficienten von Drahtrollen zu messen.

Durch Einschaltung einer Flüssigkeitszelle in einen Stromkreis erfolgt eine schnell wechselnde Polarisation der Elektroden. Diese erzeugt eine Phasenverschiebung in dem Strom. Auch hier wird eine Berechnung derselben auf Grund einer einfachen Annahme über die Natur der galvanischen Polarisation gegeben. Die Versuche zeigen indess, dass dieselbe genau zutreffend ist, so dass weitere Untersuchungen hierauszuführen sind. Ok.

DEPREZ. Des actions électriques dans les systèmes d'inducteurs semblables. C. R. XCIV. 431-434.

DEPREZ. Sur le transport de la force aux grandes distances. C. R. XCIV. 434-436.

DEPREZ. Nouvelles expressions du travail et du rendement économique des moteurs électriques. C. R. XCV. 778-781.

Mit Rücksicht auf das Problem der Kraftübertragung behandelt der Verfasser in der ersten Notiz die Frage, in welcher Weise die elektrodynamische Wirkung eines Systems von Leitern ändert, wenn die Dimensionen derselben, bei gleichbleibender Stromintensität, sämmtlich in einem bestimmten Verhältniss verändert werden. Die zweite Notiz enthält eine kurze Wieder-









nache Rechnungen erklärt. Zunächst zeigt der Verfasser, dass die Poisson'sche Theorie und die Faraday'sche Vorstellung der Kraftlinien zu demselben Ergebnis führen. Es wird dann angenommen, dass ein unbegrenzter eiserner Hohlcyylinder in ein gleichförmiges, magnetisches Kraftfeld gebracht wird. Es zeigt sich, dass die magnetische Wirkung im Innern des Cylinders erheblich verkleinert ist. Die Rechnungen, zu welchen das erwähnte Problem führt, geben gleichzeitig die Lösung eines Strömungsproblems. Denkt man sich in ein mit geradlinigen Strömen erfülltes Feld einen unendlich grossen Hohlcyylinder von anderem resp. besserem Leitungsvermögen eingeführt, so werden dadurch die Stromlinien verändert. Das berechnete magnetische Potential giebt in diesem Fall das Potential der elektrischen Strömung. Zum Schluss beschreibt der Verfasser noch einige Inductionsversuche, welche ebenfalls einen Beweis der Schirmwirkung einer hohlen Eisenmasse liefern.

Ok.

---

J. STEFAN. Ueber die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. Wien. Anz. 1882. 116-117; Wien. Ber. LXXXV. 987-996; Wiedemann Ann. (2) XVII. 956-964.

Ist die betreffende Axe die  $x$ -Axe und setzt man

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

so nimmt bekanntlich die Laplace'sche Differentialgleichung die Form an:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = 0.$$

Das System der Kraftlinien, welche die Potentialflächen senkrecht schneiden, ist dann durch eine Function  $U = \text{Const.}$  gegeben, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varrho} = \varrho \frac{\partial V}{\partial x}$$

genügen muss.

Der Verfasser bespricht eine Reihe naheliegender Beziehungen zwischen den beiden Functionen.







weisen, dass zu jeder Verteilung der magnetischen Materie innerhalb eines Körpers oder auf dessen Oberfläche eine äquivalente Verteilung constanter galvanischer Ströme gefunden werden kann. Der Verfasser zieht es vor, die Bedingung dafür direct herzuleiten, dass eine galvanische Verteilung und eine magnetische Verteilung für einen Raum  $S$ , welcher von den beiden Flächen  $\mu = \mu_1$  und  $\mu = \mu_2$  begrenzt ist, äquivalent seien. Darauf werden allgemeinere Betrachtungen angestellt, nämlich in Bezug auf zwei Räume  $S$  und  $S_0$ , deren erster von den Flächen  $(\mu_0), (\mu_1), (\nu_0), (\nu_1)$  und deren zweiter von den Flächen  $(\mu_0), (\mu_1), (\nu_0)$  begrenzt ist. Diese Rechnungen und die weiteren speciellen Entwicklungen müssen im Original nachgelesen werden. Rs.

## Capitel 4.

### W ä r m e l e h r e.

#### A. Mechanische Wärmetheorie.

E. A. ROWLAND. Relazione critica sulle varie determinazioni dell' equivalente meccanico della caloria. Opera premiata dal Reale Istituto Veneto di scienze, e tradotta dall' inglese. Appendice al 'Tomo VII. dell Serie V. degli Atti del R. Ist. Ven. Venezia. G. Antonelli.

Die bisherigen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes sind systematisch geordnet und kritisirt. Der Verfasser berichtet besonders ausführlich über seine Abhandlung: „On the Mechanical Equivalent of Heat with subsidiary Researches on the variation of the Mercurial from the Air Thermometer, and on the variation of the Specific Heat of Water,“ welche in Boston Proc. (2) VII. 75-200 veröffentlicht wurde. Von den erhaltenen Werten des mechanischen Aequivalentes der Wärme









Es wird daran erinnert, dass die absoluten Temperaturen  $T$  und  $T'$  durch die Gleichung

$$\frac{Q}{T} - \frac{Q'}{T'} = 0$$

definiert sind, wobei  $Q$  und  $Q'$  zwei Wärmemengen bedeuten. Der Verfasser will die absolute Temperatur als Function der thermischen Eigenschaften irgend eines Körpers ausdrücken. Ein beliebiges Thermometer zeige  $x$ , wenn es den betrachteten Körper berührt,  $y$  sei eine von  $x$  unabhängige Variable (Druck, Volumen, etc.), welche mit  $x$  den Zustand des Körpers vollständig bestimmt;  $dq$  sei die unendlich kleine absorbierte Wärmemenge während der Aenderung ( $dx, dy$ ). Es wird angenommen

$$dq = Pdx + Qdy$$

und hinzugefügt, dass alle Werte von  $P$  und  $Q$  zwischen gewissen Grenzen von  $x$  und  $y$  experimentell oder in anderer Weise bestimmt sind. Für geschlossene Kreisprocesse findet man

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{T} \left( Q \frac{\partial T}{\partial x} - P \frac{\partial T}{\partial y} \right).$$

Der gesuchte Wert  $T$  ist eine von  $y$  unabhängige Temperaturfunction und daher hat man

$$(1) \quad \frac{\frac{\partial T}{\partial x}}{T} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$$

und folglich durch Integration, durch welche eine Constante  $T_0$  eingeführt wird,

$$(2) \quad T = T_0 e^{\int_{x_0}^x \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} dx}.$$

Es wird bewiesen, dass der Wert von  $T$  nicht davon abhängt, wie das benutzte Thermometer graduirt ist. Um die Gleichung (2) zu prüfen, wird sie auf zwei Fälle angewendet, von welchen das Resultat bereits bekannt ist, nämlich 1) auf vollkommene Gase, und 2) auf den Fall, wo  $y$  das Volumen der Gewichtseinheit irgend eines Körpers bezeichnet. Im letzteren Falle führt die



Energie  $T$  mittels eines constanten Coefficienten  $k$  dient. Die Constante des idealen Gasgesetzes, welches aus (1) durch die Annahme  $f = 0$ ,  $\beta = 0$  sich ergibt, ist mit  $k$  bezeichnet.  $\theta$  ist eine Temperaturfunction, deren Bedeutung näher dargestellt wird. Es wird gezeigt, wie man zu der Gleichung (1) gelangen kann.

Indem für Kohlensäure die Formel

$$\left(p + \frac{0,00874}{v^2}\right)ve^{-\frac{\beta}{v}} = 1,00646(1 + 0,00371 \cdot \theta)$$

angenommen und die Grösse  $\beta$  aus den älteren Versuchen von Andrews (Phil. Trans. for 1869, 575; Poggendorff Ann. Ergbd. V.) bestimmt wird, bekommt der Verfasser für  $\beta$  gut übereinstimmende Werte. Ferner teilt er mit, dass er mit den Versuchsergebnissen von Janssen, Amagat, Andell und F. Roth bezüglich der Körper  $\text{CO}_2$ ,  $\text{NH}_3$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$  und  $\text{C}_2\text{H}_4$  entsprechende Rechnungen ausgeführt habe, welche „gleich günstige Resultate“ ergeben haben. „Das Resultat derartiger Prüfungen scheint mir dann ausgesprochen werden zu können; dass die Correction  $f$  des äusseren Druckes in der That bei Gasen sehr nahezu dem Quadrate des specifischen Volumens umgekehrt proportional, ausserdem aber auch von der Temperatur abhängig zu sein ist.“

An der Grundformel werden weitere Betrachtungen für den Fall angestellt, dass der Stoff sich im kritischen Zustande befindet. Misst man die Veränderlichen  $p$ ,  $t$ ,  $v$  durch die kritischen constanten Werte, setzt man daher

$$\frac{p}{p^*} = \pi, \quad \frac{t}{t^*} = \tau, \quad \frac{v}{v^*} = \bar{v},$$

hat man zwischen diesen Grössen die Beziehung

$$(2) \quad \pi = \frac{2e^{\nu+\nu^*}}{1-\nu^*} \frac{\tau}{\bar{v}} - \frac{1+\nu^*}{1-\nu^*} \left(\frac{1}{\bar{v}}\right)^2,$$

)

$$\nu = \frac{\beta}{v} \text{ und } \nu^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

i.

Gesetze der Wärmecapacität gesättigter Flüssigkeiten und Dämpfe“ und über „die allgemeinen thermodynamischen Grundgesetze der Gase, Dämpfe, Flüssigkeiten“; im letzten derselben wird für den Cohäsionsdruck  $f$ , welcher in (1) eingeführt wurde, der Ausdruck aufgestellt:

$$f = \frac{h}{v^2} \cdot \int_{t_0}^t e^{\frac{\beta}{v}} \frac{d\beta}{dt} dt.$$

Rs.

G. SCHMIDT. Ueber die innere Pressung und die Energie überhitzter Dämpfe. Wien. Anz. 154-155; Wien. Ber. LXXXVI. 511-538.

Als Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe wird angenommen

$$(1) \quad pv = B(T - \theta),$$

indem  $\theta$  eine zu bestimmende Function von  $p$  und  $v$  bezeichnet und  $T = a + t = 274,6 + t$  die absolute Temperatur ist, „weil der Ausdehnungscoefficient vollkommener Gase sowie für hoch verdünnte atmosphärische Luft nach Rankine mit  $0,0036416 = 1:274,6$  angenommen werden kann.“ Ferner sei „ $A = 1:423,5$  das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit,  $U$  die Energie in Calorien gemessen“,  $c = c_v$ ,  $C = c_p$  (nach Clausius'scher Bezeichnungsweise),  $\kappa$  der „Grenzwert des Quotienten der beiden Wärmecapacitäten für unendliche Ueberhitzung“,  $\epsilon$  die von Hirn (siehe Mémoire sur la thermodynamique, 2. partie, Ann. d. Chim. et Phys. (4) XI. 5-111) eingeführte „innere Pressung“, „welche die Molecularanziehung des Inneren auf die Oberflächeneinheit misst und in demselben Sinne wirkt, wie der äussere specifische Druck  $p$ .“ Die innere Pressung kann als Analogon des Elasticitätsmoduls fester Körper betrachtet werden. Indem gesetzt wird

$$\theta - p \frac{\partial \theta}{\partial p} = \varphi,$$

wo  $\varphi$  im Allgemeinen eine Function von  $p$  und  $v$  bedeutet, ergibt sich u. A.



wird am einfachsten durch das Studium der Coefficienten  $\alpha_p$  und  $\alpha_v$  herbeigeführt werden“ oder durch die Untersuchung von

$$\eta = \frac{a - \frac{1}{\alpha_p}}{a - \frac{1}{\alpha_v}} = \frac{1}{\varphi} \left[ \theta - (T - \theta) \left( \frac{AB}{mC} - 1 \right) \right],$$

worin  $m = \frac{x-1}{x}$  ist.

Rs.

J. STEFAN. Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken. Wiedemann Ann. (2) XVII. 550-560.

Abdruck von Wien. Ber. LXXXIII. 953-954. Siehe F. d. M. XIII. 1881. 805-807.

Rs.

H. HELMHOLTZ. Thermodynamik chemischer Vorgänge. Berl. Ber. 1882. 22-31, 825-836.

Da eine Fortsetzung dieser Mittheilungen im Jahre 1883 veröffentlicht ist, wird das Referat im nächsten Jahrgange gegeben werden.

Rs.

A. WASSMUTH. Ueber die specifische Wärme des stark magnetisirten Eisens und das mechanische Aequivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme. Wien. Ber. LXXXV. 997-1003.

Stefan hat in seiner Abhandlung „Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction“ (Wien. Ber. LXIV. 193-224) auf Seite 220 den Satz gegeben: „Zur Erwärmung des magnetischen Eisens ist mehr Wärme erforderlich als zur gleich starken Erwärmung des unmagnetischen.“ Falls keine freien Magnetismen auftreten, während das bei 0° magnetische Eisen das Maximum  $m$  seines Momentes erhalten hat, ist für ein Milligramm Eisen die Magnetisirungsarbeit









**Jenigen Ursachen gehört, welche eine dauernde Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie hervorbringen können.“** Der Verfasser findet, „dass die „isothermische“ Zustandslinie die **äusserste** Grenze repräsentirt, bis zu welcher eine dauernde Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie sich erstrecken kann.“ Daher untersucht er zunächst die Eigenschaften der isothermischen Zustandslinie. Die hierbei gefundenen Gleichungen und Tabellen würde man zur Lösung der folgenden, von der mechanischen Wärmetheorie ganz unabhängigen Aufgabe benutzen können: „In einem gegebenen (von fester Fläche umschlossenen) Kugelraume soll eine gegebene (gasförmige) Masse so verteilt werden, dass ( $\tau$ ) das Verhältniss der Druckes zur Dichtigkeit einen überall gleich grossen vorgeschriebenen Wert annimmt.“ Bezeichnet  $Ng$  die Gravitationsbeschleunigung im Abstände  $r$  und  $m$  eine Constante, so ist

$$\tau = mNr = \frac{p}{\gamma} = RT,$$

und der Verfasser erhält die beiden Sätze: „Eine gegebene Masse kann in einem gegebenen Kugelraume auf unendlich viele verschiedene Arten so verteilt werden, dass das Verhältniss des Druckes zur Dichtigkeit den überall gleich grossen Wert  $\frac{1}{2} Nr$  annimmt.“

„Die absolute Temperatur einer im Gleichgewichtszustande befindlichen isothermischen Gaskugel kann niemals kleiner als  $0,4 \frac{Nr}{R}$  sein.“

„Den zum Gleichgewichtszustande der isothermischen Gaskugel erforderlichen Oberflächendruck  $p$ , kann man sich, anstatt durch eine feste Oberfläche, auch durch das Gewicht einer auf die Oberfläche gelegten Schicht hervorgebracht denken, welche die isothermische Gaskugel als Rinde umhüllt.“ Nach entsprechender Lösung dieser Aufgabe untersucht der Verfasser die adiabatische Gaskugel mit isothermischem Kerne, den Einfluss der Temperatúrausgleichung auf die Form der Zustandslinie, radiale Strömungen im Innern der Sonnenmasse, Grenzen















sein könnte.“ Nach dem Verfasser dürfte es am zweckmässigsten sein, ein Gemisch von halb Kohlensäure und halb Luft in reine Luft und in reine Kohlensäure diffundiren zu lassen. Rs.

---

### C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

A. DRONKE. Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. Beer und Dr. J. Plücker. Leipzig. G. B. Teubner.

Die Schrift ist ein Analogon zu den beiden anderen Schriften Beer's „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik“ und „Einleitung in mathematische Theorie der Elasticität und die Capillarität.“ Herr Dronke hat „gesucht, die analytische Theorie der Wärmeverbreitung nach dem Beer'schen Plane wiederherzustellen und zwar wohl so, wie die Schrift zur Zeit von Beer's Tode etwa abgefasst sein würde.“ Rs.

---

H. RÉSAL. Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier. Résal J. (3) VIII. 79-124.

Weil Fourier's Théorie de la chaleur in Frankreich selten geworden ist, giebt Résal einen Auszug der wesentlichen Teile dieser Theorie und fügt Anmerkungen hinzu, damit einige Beweise einfacher oder strenger als im Texte gegeben werden können. Rs.

---

H. LAGARDE. Recherches analytiques sur la méthode de M. Thoulet, relatives à la conductibilité thermique. Ann d. Chim. et Phys. (5) XXXVI. 552-568.

H. LAGARDE. De l'évaluation de la conductibilité thermique par la mesure des temps pendant l'état variable. C. R. XCIV. 1048-1051.

Thoulet beschreibt in seiner Abhandlung „Recherches expérimentales sur la conductibilité thermique des minéraux et des





ADAN. Quelques mots sur une méthode de détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) III. 69-74.

FOLIE. Un mot encore sur la détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) III. 350-352.

Herr Folie verteidigt gegen Herrn Adan, der ein graphisches Verfahren vorschlägt, eine Bessel'sche Methode. Mn. (O.).

J. VAN DEN BERG. Over de onderlinge af wijking van den grooten cirkelboog en de loxodromische kromme tusschen twee naby gelegen plaatsen op de bolvormige aarde. Nieuw Arch. IX. 15-31.

Die Arbeit handelt von der Abweichung des grössten Kreises von der Loxodrome zwischen zwei benachbarten Orten der kugelförmigen Erde. Janse (siehe F. d. M. XIII. 1881. 338) hatte diesen Unterschied durch Rechnung gefunden, hier wird er auf einfachem geometrischem Wege abgeleitet und auf selbe Art die Formeln für beide Kurswinkel bestimmt. Zum Schlusse werden einige Fehler in den Rechnungen Janse's nachgewiesen und verbessert. G.

HALL. The density of the earth. Analyst IX. 129-132.

Formeln für die Abweichung von der Verticalen durch die Ziehung einer Wasserflut, mit einer numerischen Anwendung ähnlich dem Falle der Bai von Fundy. Der Verfasser findet, dass die Abweichung ungefähr  $0^{\circ},348$  sei, ein Bogen, „der schwierig genau zu bestimmen sein würde.“ Jn. (O.).

ELMERT. Der Einfluss der Lothablenkung bei einem Gebirgsrücken auf die Ergebnisse geometrischer Nivellements. Jordan Z. f. V. XI. 233-243, 249-255.

Verfasser knüpft an das von Zachariä (Astr. Nachr. 1916) gewählte schematische Beispiel zur Schätzung des genannten



gesucht dasjenige System der  $x$ , für welches die Summe der absoluten Werte der  $L$  ein Minimum wird. Ferner zeigt sich, dass in den Fällen, wo die Aufgabe unendlich viele Lösungen zulässt, unter diesen immer eine vorkommt, bei der durch die entsprechend verteilten Messungen nur gerade die notwendige Anzahl von Winkeln im Netze bestimmt wird. B.

---

JORDAN. Teilung eines Vierecks. *Jordan Z. f. V.* 421-428.

Aufstellung trigonometrischer Formeln für die in der Praxis vorkommenden Fälle der genannten Aufgabe. B.

---

JORDAN. Bemerkung zur Rectification eines Meridianbogens. *Jordan Z. f. V.* 622-625. B.

---

A. SCHELL. Der Einschneide-Transporteur von Victor von Reitzner. 8<sup>o</sup>. Wien. Seidel und Sohn. 1882.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus drei um dasselbe Charnier drehbaren Linealen, deren Kanten durch den Drehungsmittelpunkt des Charniers gehen. Die Brochure behandelt den Gebrauch dieser Instrumente zur graphischen Lösung der Potheuotschen Aufgabe auf dem Messtische. B.

---

DORNA. Relazione sopra una memoria del prof. Jadanza. *Atti di Torino XVII.* 647.

JADANZA. Alcuni problemi di Geodesia. *Atti di Torino XVII.* 742.

---

CH. M. SCHOLS. Studien over kaartprojectien. *Nieuw Arch. VIII.* 113-222.

Diese umfangreiche Abhandlung über die Kartenprojection wurde veranlasst durch eine Preisfrage nach der Projection mit





. THIRION. *Compte rendus. Qu. sc. XIV.* 594-602.

Das Vademecum hat über 1100 Seiten: es ist die zweite und durch das Repertorium der Constanten in der Astronomie (siehe F. d. M. X. 1878. 773) vermehrte Auflage. Herr Thirion hat einige in solchem Werke verzeihliche Fehler gefunden; im übrigen rühmt er das Buch als sehr brauchbar.

Mn. (O.).

L. SCHELLE. *Lehrgang der populären Astronomie und mathematischen Geographie für Gymnasien* bearbeitet. 2. Aufl. 8<sup>o</sup>. Kempten. J. Kösel. 1882.

B.

M. J. STUDNÍČKA. *Mathematische Geographie.* Prag. (Böhmisch).

Diese Schrift bildet den II. Teil einer umfangreichen allgemeinen Geographie und behandelt auf historischer Grundlage im 1. Abschnitt die Form der Erde, im 2. Abschnitt die Messung der Erde, im 3. Abschnitt die Grösse der Erde, im 4. Abschnitt die kartographische Darstellung der Erde, in einen Anhang endlich eine Erklärung des Principes der Lehmann'schen Schraffirmethode wie der Isohypsen Ducarla's. Die mathematischen Formeln sind, sobald sie mit Differentialausdrücken zu tun haben oder complicirt werden, unter den Strich in Anmerkungen verwiesen worden.

Std.

K. ISRAEL-HOLTZWART. *Abriss der mathematischen Geographie für höhere Lehranstalten.* 1882. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

B.

K. ISRAEL-HOLTZWART. *Elemente der sphärischen Astronomie für Studierende* bearbeitet. 1882. Wiesbaden. J. F. Bergmann.







**CH. V. ZENGER.** On the solution of Kepler's problem.

Monthl. Not. XLII. 446-449.

**J. C. ADAMS.** On Newton's solution of Kepler's problem.

Monthl. Not. XLIII. 43-49.

- In der ersten Arbeit giebt Professor Zenger eine Näherungsmethode für die Kepler'sche Gleichung, indem er Reihen benutzt, die  $u$  in steigenden Potenzen von  $\sin u$  geben, und wendet sie auf Beispiele an.

In der zweiten Arbeit macht Professor Adams darauf aufmerksam, dass von allen Methoden, die zur Lösung dieses Problems in Vorschlag gebracht worden sind, diejenige, welche am schnellsten zu irgend welchem verlangten Grade von Genauigkeit führt, die von Newton in den „Principia“ 2. Bd. p. 109-116 gegebene ist. In dieser Methode ist die Ordnung der Fehler bei jeder folgenden Näherung mehr als verdoppelt, und dies erklärt den ausserordentlichen Vorteil gegenüber dem Gebrauch von Reihen, die nach Potenzen von  $e$  fortschreiten, wenn grosse Genauigkeit für das Resultat verlangt wird; da in der letzteren Methode die Hinzufügung eines neuen Gliedes die Ordnung des Fehlers nur um eine Einheit vermehrt.

Herr Adams bemerkt ferner, dass der Grad der Schnelligkeit der Näherung durch eine Veränderung in dem Verfahren noch vermehrt werden kann. Er giebt eine Geschichte der Methode und zeigt, dass die ungewöhnliche Form, in welcher Newton dies Verfahren geboten hat, die folgenden Schriftsteller verleitet hat, ihn nicht für den Verfasser zu halten. Er spielt auch auf eine merkwürdige Tatsache betreffs der Veröffentlichung dieses Verfahrens von Newton an. Zum Schluss giebt er eine eigene graphische Methode.

Der Arbeit von Adams folgt eine kurze Note, in der er von Professor Zenger's Lösung Notiz nimmt und auf ein Missverständnis aufmerksam macht.

Glr. (O.).

**R. RADAU.** Remarques concernant le problème de Kepler.

C. R. XCV. 274-276.



**STIELTJES.** Sur un théorème de M. Tisserand. C. R. XCV. 901-903.

Der Aufsatz bezieht sich auf die Untersuchung von Herrn **Tisserand** in C. R. LXXXVIII. und LXXXIX. (cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 804).

Ist

$$\cos \varphi = \cos u \cos u' \cos(x - x') + \sin u \sin u' \cos(y - y'),$$

so handelt es sich um die Entwicklung von

$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$$

in eine trigonometrische Reihe nach Vielfachen von  $x - x'$  und  $y - y'$ . Unter Benutzung einer partiellen Differentialgleichung gelingt die Darstellung der Coefficienten durch Producte von hypergeometrischen Reihen, ein Resultat, das für den speciellen Fall  $u = u', x' = y' = 0$  von Herrn Tisserand zuerst gefunden worden war. B.

**HARZER.** Eine neue Methode, die negativen und ungraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln. Astr. Nachr. 2425.

Setzt man in der aus der Theorie der Thetareihen folgenden Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} = \frac{1 + 2 \sum e^{-nn\varrho}}{1 + 2 \sum e^{-nn\frac{n}{\varrho}}}$$

für  $\varrho$  den Wert  $\Delta^2: f^2$ , wo  $\Delta$  die gegenwärtige Distanz zweier Planeten und  $f$  eine sehr grosse Constante bedeutet, so erhält man die angenäherte Formel

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{f} \left( 1 + 2 \sum e^{-nn} \frac{\Delta \Delta}{ff} \right).$$

Durch Differentiationen nach  $\varrho$  giebt die ursprüngliche Formel analoge Ausdrücke für die negativen ungraden Potenzen von  $\Delta$ . Die trigonometrische Entwicklung von  $\Delta^2$  in den Exponenten bietet keine Schwierigkeit, während die weitere tri-





TISSERAND. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. C. R. XCIV. 997-1004.

Anknüpfend an eine frühere Abhandlung (Cfr. F. d. M. XIII. 81. 844) untersucht der Verfasser den bereits von Leverrier vorgehobenen Fall, dass die Neigung eines kleineren Planeten durch die Störungen von Jupiter und Saturn sehr erhebliche Oscillationen ausführen kann, wenn die Halbaxe desselben nahe einem gewissen Werte liegt. Durch ein gemischtes, teils analytisches, teils numerisches Verfahren gelingt es, die Grenzen anzugeben, innerhalb deren die Neigung oscilliren kann.

B.

ALDÉN. Sur l'équation différentielle, qui donne immédiatement la solution du problème des trois corps jusqu'aux quantités de deuxième ordre inclusivement. C. R. XCV. 55-58.

Reduction einer in den Strömungsformeln des Verfassers tretenden Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Py = Q.$$

B.

ALDÉN. Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper. Act. Math. I. 77-92.

Die behandelte Aufgabe besteht darin, zu der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1y = \psi_0 + \psi_2y^2 + \psi_3y^3 + \dots$$

unter gewissen Voraussetzungen über die Form und die Grössenordnung von  $y$  und den Coefficienten  $X_1, \psi$  eine nur aus periodischen Gliedern bestehende Lösung durch successive Approximation finden. Der Nerv des Verfahrens, welches an dem Beispiel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha \cos \lambda x \cdot y = \psi_0 + \dots$$







D. CALLANDREAU. Sur la détermination des variations séculaires et des éléments moyens des orbites.

Astr. Nachr. 2435.

Bezieht sich auf die von Herrn Hill dem Gauss'schen Verfahren gegebene Gestalt. (Astronomical papers prep. for the use of the Amer. Ephemeris etc. Vol. I, 5). B.

E. NELSON. Note on a term in the perturbations of the moon, due to the action of Mars. Monthl. Not. XLII. 267-269. (1882).

In einer früheren Arbeit hatte der Verfasser erklärt, dass er gefunden habe, dass der Coefficient des Gliedes mit dem Argument  $l - 24l'' + 20l'''$ , wo  $l, l'', l'''$  die mittleren Längen des Mondes, der Erde und des Mars bezeichnen, sich auf mehrere Sekunden beläuft. Diesen Tatbestand hatte er nur als einen vorläufigen gegeben; jetzt zieht er ihn nach genauerer Prüfung zurück. Der genaue Wert des Gliedes ist von Gogou untersucht und als unmerklich gefunden worden. Glr. (O.).

G. W. HILL. Review of the „theory of the moons motion deduced from the law of universal gravitation“ by John N. Stockwell. Analyst IX. 41-47.

J. N. STOCKWELL. On Mr. Hill's review of the theory of moons motion. Analyst IX. 82-90.

Verteidigung der Theorie durch Herrn Hill und Erwiderung auf seine Kritik von Herrn Stockwell. Jn. (O.).

P. LEHMANN. Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. 8<sup>o</sup>. Berlin 1882. K. Statistisches Bureau.

B.



**N. HERZ.** Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen.

Wien. Anz. 1882. 248; Wien. Ber. LXXXVI. 1125-1131.

Die erste Abhandlung giebt eine Lösung des Kometenproblems unter Benutzung von drei vollständigen Beobachtungen, ein Gedanke, der schon früher, jedoch mit unnötigen einschränkenden Voraussetzungen, benutzt worden ist. Das Wesentliche hierbei ist, dass die Relation zwischen den beiden äusseren Distanzen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  in aller Strenge sich auf die Form  $\varrho_2 = M\varrho_1$  bringen lässt. Die Brauchbarkeit des Verfahrens wird an einem Beispiel nachgewiesen.

Der zweite Aufsatz weist darauf hin, dass bei mehrfachen Lösungen die Zahl derselben drei oder zwei ist, jenachdem man die Excentricität gleich Eins setzt oder aus den Beobachtungen bestimmt, dass ferner die allein richtige Lösung in beiden Fällen angenähert dieselbe sein müsse, dass also hierin ein Kriterium zur Ausscheidung der unzulässigen Lösungen liege. B.

**TH. VON OPPOLZER.** Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen beim Cometenproblem.

Astr. Nachr. 2468.

Mitteilung der Formeln ohne Beweis.

B.

**GYLDÉN.** Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgeteilte Cometenentdeckung.

Astr. Nachr. 2445-2446

Verfasser geht bei der Behandlung dieser vielberufenen Frage von der Voraussetzung aus, dass die beiden ersten Beobachtungen der betreffenden Reihe nicht von vornherein als apokryph zu verwerfen seien, nur dass dann wegen der sich dabei ergebenden ausserordentlich starken Annäherung an die Erde der Versuch Bahnelemente abzuleiten einen von den gewöhnlichen Methoden abweichenden Weg einschlagen müsse. Verfasser giebt eine auf der Benutzung der von ihm eingeführten intermediären Bahn beruhende Behandlung des Falles, wo die Anziehung des stören-









**CERASKI.** Ueber die Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs. *Astr. Nachr.* 2416.

Verfasser benutzt den Abstand der sich in Ocularprismen zeigenden dunkeln Segmente von der Mitte des Gesichtsfeldes, um die Vergrößerung zu bestimmen.

B.

---







**J. HENRICI.** Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Leipzig. Teubner.

Die Tafeln sind auf steifem Papier gedruckt und empfehlen sich deshalb für den Handgebrauch. Sie enthalten die Briggschen Logarithmen der Zahlen, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen und die goniometrischen Functionen. O.

---

**E. BECKER.** Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf fünf Decimalen. Leipzig. Tauchnitz.

Die Tafel unterscheidet sich von anderen fünfstelligen Tafeln vorteilhaft dadurch, dass sich je 100 Reihen auf jeder aufgeschlagenen Seite finden. Sie enthalten das gewohnte Material in der übersichtlichen Form des Brubns'schen logarithmischen Handbuchs. O.

---

Weitere Logarithmentafeln sind:

- 1) **J. G. BÖHM.** Kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (5-stellig). 4<sup>te</sup> Aufl. Innsbruck. Wagner.
  - 2) **TH. WITTSTEIN.** 5-stellige logarithmisch - trigonometrische Tafeln. 10<sup>te</sup> Aufl. Hannover. Hahn. O.
- 

**W. C. WITTWER.** Grundzüge der mathematischen Chemie. Schlömilch Z. XXVII. 289-309, 329-345.

Die speciellen Betrachtungen (siehe F. d. M. XII. 1880. 872—873 und XIII. 1881. 868) werden fortgesetzt; analoge Rechnungen wie früher werden ausgeführt in Bezug auf die drei Alkalimetalle Kalium, Natrium und Lithium, sowie deren Verbindungen mit Sauerstoff, mit Wasserstoff, mit Sauerstoff und Wasserstoff. Am Schlusse der Mitteilung (von Seite 342 ab) werden die Resultate zusammengestellt, um die Analogien, welche zwischen den drei Metallen bestehen, sowie die Verschiedenheiten besser hervortreten zu lassen. Rs.

---









	Seite
<b>Bordiga, G. A.</b> Sulle quadriche analoghi a quello di Pascal nelle coniche . . . . .	556
<b>Borletti, F.</b> 1) Solutions de questions . . . . . 59.	211
2) Trasformazione delle coordinate nello spazio . . . . .	585
<b>Bouniakowsky, V.</b> Propriétés d'une classe particulière des fractions décimales périodiques . . . . .	116
<b>Bougaeff, N. V.</b> Eigenschaften der Reste und der Zahlsummen .	122
<b>Bourgnet, J.</b> 1) Sur les permutations de $n$ objets . . . . .	147
2) Problème de permutations successives nommé Battement de Monge	148
<b>Boussinesq, J.</b> 1) Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles . . . . .	247
2) Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions .	301
3) Sur l'intégration d'une équation . . . . .	302
4) Intégration de certaines équations aux dérivées partielles . . .	781
5) Équations différentielles du mouvement de certaines ondes . . .	781
6) Sur certaines ondes dans l'eau en repos d'un canal . . . . .	781
7) Sur un potentiel à quatre variables . . . . .	798
8) Les déplacements de petites dilatations ou condensations . . .	805
9) Équilibre d'élasticité d'un solide . . . . .	806
10) Transmission d'une pression oblique . . . . .	806
11) Résistance d'une barre prismatique . . . . .	818
12) Sur le choc d'une plaque élastique . . . . .	818
<b>Brassinne, E.</b> 1) Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal . . . . .	530
2) Manière de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier . . . . .	732
3) Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie . . . . .	740
4) Questions de mécanique rationnelle . . . . .	747
5) Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action dans les questions de la dynamique . . . . .	747
6) Sur un passage de la „mécanique analytique“ . . . . .	747
7) Méthodes générales pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux . . . . .	747
<b>Braunmühl, A. v.</b> Geodätische Linie und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades . . . . .	689
<b>Bresch, R.</b> Der Chemismus, Magnetismus und Diamagnetismus . .	34
<b>Brill, A.</b> 1) Ueber binäre Formen . . . . .	64
2) Das Polvierseit . . . . .	534
<b>Brill, L.</b> Nachtrag zum Catalog mathematischer Modelle . . . . .	691
<b>Brillouin, E.</b> Comparaison des coefficients d'induction . . . . .	877
<b>Brioschi, F.</b> 1) Sur les fonctions de sept lettres . . . . .	98
2) Relazione sopra una memoria del Prof. R. de Paolis . . . . .	140
3) Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari . . . . .	265
4) Une application du théorème d'Abel . . . . .	278
<b>Brisse, Ch.</b> 1) Applications des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en $S$ . . . . .	676
2) Réduction de l'équation générale des surfaces du second ordre	680
<b>Brocard, H.</b> Interprétation de l'équation caractéristique de diverses courbes . . . . .	621
<b>Broda, K.</b> Bildungsgesetz periodischer Brüche . . . . .	146
<b>Bruno, F. de.</b> 1) Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques . . . . .	69
2) Nouvelle série dans les fonctions elliptiques . . . . .	391
<b>Bruno, G.</b> 1) Coniche che passano per tre punti dati e toccano due rette date . . . . .	533



	Seite
Cayley, A. 11) Reduction of $\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ to elliptic integrals . . .	405
12) Note on Abel's theorem . . . . .	403
13) Addition to a paper of Mr. Rowe . . . . .	410
14) A memoir on the Abelian and Thetafunctions . . . . .	411
15) On the geometrical forms called trees . . . . .	444
16) Note on the formulae of trigonometry . . . . .	469
17) On curvilinear coordinates . . . . .	587
18) Weitere Aufgaben über Curven vierter Ordnung . . . . .	633
19) Determination of the order of a surface . . . . .	669
20) On two cases of the quadric transformation between two planes . . . . .	721
Cazzaniga, P. 1) Il calcolo dei simboli d'operazione . . . . .	318
2) Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti . . . . .	324
3) Sopra una formola di Cauchy . . . . .	331
Ceraski. Ueber die Bestimmung der Vergrößerung eines Fernrohrs . . . . .	935
Certo, L. Lo spazio delle omologie affini di un piano . . . . .	723
Césaro, E. 1) Formule d'arithmétique . . . . .	115
2) Question de probabilité . . . . .	178
3) Sur la tractrice . . . . .	637
Charve, H. L. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives . . . . .	145
Chomé. Propriété des surfaces gauches . . . . .	643
Choura, J. Unterricht in der darstellenden Geometrie . . . . .	483
Christensen, S. A. Vindskjæve Kurvers Polarflade . . . . .	667
Chrystal. 1) On Mr. Muir's transformation of a determinant into a continuant . . . . .	102
2) On a special class of Sturmians . . . . .	102
Clausius, R. 1) Die Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen . . . . .	857
2) Zusammenhang zwischen den Einheiten der Elektrizität und des Magnetismus . . . . .	857
3) Formule relative à l'électrisation par influence . . . . .	862
Cohen, A. Solutions of questions . . . . . 87. 196.	471
John, J. Beweis einer Entwicklung einer Function . . . . .	196
Jolley, R. 1) Ueber die Existenz einer dielektrischen Polarisation in Elektrolyten . . . . .	865
2) Ueber die in einem geschlossenen Stromkreise geleistete Arbeit äusserer Kräfte . . . . .	867
Collignon, E. Résolution graphique de certains problèmes de cosmographie . . . . .	918
Constable, W. J. Solutions of questions . . . . . 59. 463.	466
Cox, H. 1) On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space . . . . .	439
2) On systems of circles and bicircular quartics . . . . .	588
3) Application of quaternions . . . . .	589
Craig, Th. 1) Some elliptic function formulae . . . . .	390
2) Certain metrical properties of surfaces . . . . .	638
3) On areas of corresponding surfaces . . . . .	639
4) A geometrical theorem . . . . .	667
5) The counter-pedal surface of the ellipsoid, with a note . . . . .	693
6) On the parallel surface to the ellipsoid . . . . .	694
Cremona, L. 1) Elemente der projectivischen Geometrie . . . . .	497
2) Sopra una memoria del prof. R. de Paolis . . . . .	691



	Seite
Dorn, E. 2) Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode . . .	875
Dorna. Relazioni sopra una memoria del prof. Jadanza . . . . .	915
Dostor, G. Volumes et surfaces de deux corps de révolution . .	476
Drasch, H. Zur synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt . . . . .	540
Dronke, A. Einleitung in die analytische Theorie der Wärmever- breitung . . . . .	909
Droz. Solution of a question . . . . .	539
Dufau, H. Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique . . .	529
Durège, H. Elemente der Theorie der Functionen . . . . .	313
Durfee, W. 1) Some properties of a certain numerical solution . .	131
2) On symmetric functions . . . . .	114
Dyck, W. Gruppentheoretische Studien . . . . .	47
Dziobek, O. 1) Ueber gewisse Functionen von sechs Variabeln .	367
2) Zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks . . . . .	528
Dziwinski, P. Richtungszahlen . . . . .	318
Easton, B. Solutions of questions 138. 156. 161. 179. 229. 466. 467. 473. 539. 619. . . . .	704
Eastwood, G. Solutions of questions . . . . . 138. 463. 465. 467.	699
Eckl. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien . . . . .	35
Edler, F. Vervollständigung Steiner'scher Beweise . . . . .	463
Edwardes, D. Solutions of questions 161. 179. 229. 462. 463. 465. 539. 618. 635. 638. . . . .	704
Elliott. Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction $\Theta$ . . . . .	416
Ely, G. S. 1) On partitions . . . . .	116
2) Algebraic solution of the modular equation for the septic trans- formation . . . . .	398
Enneper, A. 1) Flächen mit besonderen Meridiancurven . . . . .	705
2) Zur Theorie der Flächen . . . . .	706
Escherich, G. v. 1) Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen . . . . .	281
2) Die Construction der algebraischen Flächen . . . . .	560
3) Die Construction der algebraischen Curven und Flächen . . .	560
Evans. Solution of a question . . . . .	229
Faifofer, A. Lejeune-Dirichlet. Lezioni sulla teoria dei numeri .	115
Falk, M. Om derivator och differentialer af en funktion . . . . .	204
Favaro, A. 1) Bartolomeo Sovero . . . . .	12
2) Carteggio Galileiano . . . . .	15
3) Un episodio del processo di Galilei . . . . .	15
4) Nuova edizione delle opere di Galilei . . . . .	15
5) C. Culman . . . . .	20
Faye. Discours . . . . .	19
Fergola, E. 1) Sopra una formola del sig. G. Erdmann . . . . .	306
2) Di alcune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche	400
Fermat, P. Manuscripts inédits . . . . .	14
Fialkowski, N. Zeichnende Geometrie . . . . .	449
Fiedler, W. 1) Geschichte und Theorie der elementaren Abbil- dungsmethoden . . . . .	485
2) Geometrische Mittheilungen. III. IV. V. . . . .	489. 490
3) Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln . . . . .	490
4) Cyklographie . . . . .	492. 500





	Seite
Genese, R. W. 2) On linear syzygetic relations between the coefficients of ternary equations . . . . .	613
Genocchi, A. 1) Presentazione di „Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert“ . . . . .	18
2) Sur les fonctions de M. Prym et de M. Hermite . . . . .	372
Genty. Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre . . . . .	714
Gerbal di. Sui gruppi di sei coniche in involuzione . . . . .	537
Gerlach. 1) Determinanten in der Schule . . . . .	100
2) Das Restproblem für nicht teilerfremde Divisoren . . . . .	122
Gilbert, Ph. 1) Les preuves mécaniques de la rotation de la terre . . . . .	26
2) Exercices d'analyse infinitésimale . . . . .	598
3) Cours de mécanique analytique . . . . .	724
4) Les preuves mécaniques de la rotation de la terre . . . . .	762
5) L'application de la méthode de Lagrange à plusieurs problèmes du mouvement relatif . . . . .	762
Gilles. Die Einheit der Naturkräfte . . . . .	31
Gilman, B. J. 1) On propositions and syllogism . . . . .	28
2) On propositions called „spurious“ . . . . .	29
Glaisher, J. W. L. 1) Expression for $\arg sn a$ and $(\arg sn a)^2$ as definite integrals . . . . .	221
2) On certain definite integrals . . . . .	227
3) Formulae of the $r^{\text{th}}$ integral of a Legendrian coefficient . . . . .	229
4) Examples illustrative of Cayley's theory of singular solutions . . . . .	249
5) On Riccati's equation . . . . .	272
6) On a partial differential equation . . . . .	299
7) Une identité trigonométrique . . . . .	368
8) Proof of the addition equation for elliptic integrals . . . . .	386
9) Theorem in elliptic functions . . . . .	392
10) Formulae in elliptic functions . . . . .	394
11) Method of deriving formulae in elliptic functions . . . . .	395
12) Équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques . . . . .	396
Glaisher, E. H. Formulae for $sn 8u$ , $cn 8u$ , $dn 8u$ in terms of $sn u$ . . . . .	398
Glaser, St. Ellipsoidische Flächenbelegungen . . . . .	799
Glasbau, J. C. Forms of Roll's theorem . . . . .	318
Glauser. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten . . . . .	932
Glazebrook, R. F. 1) On the refraction of polarized light at the surface of an uniaxal crystal . . . . .	847
2) Equations connected with the electromagnetic theory of light . . . . .	847
Gordan, P. 1) Büschel von Kegelschnitten . . . . .	80
2) Ueber ternäre biquadratische Formen . . . . .	80
3) Gleichungen siebenten Grades . . . . .	80
4) Ueber Büschel von Kegelschnitten . . . . .	603
Gosiewski, W. Ueber stetige Functionen . . . . .	218
Goursat, E. 1) Sur les intégrales algébriques des équations linéaires . . . . .	258
2) Les fonctions hypergéométriques de deux variables . . . . .	277
3) Fonctions uniformes présentant des lacunes . . . . .	336
4) Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables . . . . .	374
5) Sur l'équation qui relie au module la fonction complète de première espèce . . . . .	383
Gouy. Sur la propagation des ondes lumineuses . . . . .	838
Gräfe, F. 1) Ueber das Pascal'sche, resp. Brianchon'sche Sechseck . . . . .	529
2) Erweiterung eines Satzes von Hesse . . . . .	552
3) Sätze über abwickelbare Flächen . . . . .	595



	Seite
Hammerl, H. Ueber Regenbogen . . . . .	853
Hammond, J. 1) Proof that an equation must have at least $n$ roots . . . . .	46
2) Calculation of symmetric functions . . . . .	113
3) Solutions of questions . . . . . 59. 179. 467. 619. 638. 688. 689.	699
Hanel, J. Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische . . . . .	403
Hankel, H. Die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen . . . . .	320
Hansted, B. Généralisation de la fonction $X_n$ de Legendre . . . . .	430
Hardy, G. F. 1) Method of approximating to the value of annuities involving threelines . . . . .	165
2) On the rate of interest in annuities certain . . . . .	167
Harley, R. Solution of a question . . . . .	196
Harmuth, Th. Polydimensionale Zahlenfiguren . . . . .	138
Harnack, A. 1) Théorie de la série de Fourier . . . . .	187
2) Berichtigung . . . . .	189
Hart, H. 1) On the linear vectorial equation of the central pedal of a conic . . . . .	630
2) The evolute of the symmetrical bicircular quartics . . . . .	633
3) Quaternion proof of the triple generation of three-bar motion . . . . .	731
Harzer, P. 1) Die Wahrscheinlichkeit einen Kometen aufzufinden . . . . .	159
2) Neue Methode, die negativen und ungraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln . . . . .	923
3) Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre . . . . .	934
Hatt. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault . . . . .	760
Hauck, G. Perspectivische Studien . . . . .	487
Hausmaninger, V. Ueber die Veränderlichkeit der Diffusionscoefficienten zwischen Kohlensäure und Luft . . . . .	908
Häussler, J. W. Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie . . . . .	903
Hayash, H. Solution of a question . . . . .	635
Hayes, J. S. Demonstration of Maclaurin's theorem . . . . .	184
H. B. D. Solution d'une question . . . . .	210
Heal, W. E. Solution of a problem . . . . .	462
Heger, R. Leitfaden für den geometrischen Unterricht . . . . .	453
Helmert. Einfluss der Lothablenkung auf Nivellements . . . . .	913
Helmholtz, H. 1) Absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen . . . . .	857
2) Thermodynamik chemischer Vorgänge . . . . .	897
Henrici, J. 1) Elementar-Geometrie . . . . .	454
2) Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln . . . . .	939
Henry, Ch. Les deux plus anciens traités français d'algorithme et de géométrie . . . . .	14
Henry, C. Solution d'une question . . . . .	704
Heppel, G. Solutions of questions 59. 138. 149. 156. 193. 461. 463. 466.	618
Hermes, J. 1) Gleichungen ersten und zweiten Grades . . . . .	131
2) Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen . . . . .	140
Hermite, Ch. 1) Application d'un théorème de Mittag-Leffler . . . . .	329
2) Sur l'intégrale elliptique de troisième espèce . . . . .	382
3) Applications de la théorie des fonctions elliptiques . . . . .	402
Hertter, C. F. Zeichnende Geometrie . . . . .	449
Hertz, H. Berührung fester elastischer Körper . . . . .	807
Herz, N. 1) Beweis des Riemann'schen Satzes über algebraische Functionen . . . . .	360
2) Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen . . . . .	380

	Seite
Houzeau, J. C. et A. Lancaster. Bibliographie générale de l'astro- nomie . . . . .	916
Houzeau, J. C. 1) Annonce bibliographique . . . . .	916
2) Vademecum de l'astronomie . . . . .	916
Hoza, F. Zur sphärischen Trigonometrie . . . . .	473
Hromádka, F. Berechnung des kubischen Inhalts eines schiefen Prismas . . . . .	475
Hudson, W. H. H. Solution of a question . . . . .	473
Hudson, Ch. On equal roots of equations . . . . .	51
Hübner, V. J. Neue Ableitung gewisser Formeln . . . . .	469
Hugoniot. 1) Développement des fonctions en séries d'autres fonctions . . . . .	330
2) Sur des fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre . . . . .	330
3) Sur les vibrations etc., siehe Sebert . . . . .	815
Hultsch, F. Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate . . . . .	23
Hunyady, E. 1) Zusatz zu einer früheren Abhandlung . . . . .	612
2) Geometrischer Ort der Kegelspitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelfläche zweiten Grades . . . . .	692
Hurwitz, A. 1) Eine Reihe neuer Functionen . . . . .	345
2) Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(x) = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^3}$ . . . . .	371
3) Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven dritter Ordnung . . . . .	559
Jacobi, C. G. J. Gesammelte Werke . . . . .	314
Jadanza, N. 1) Sopra un determinante gobbo . . . . .	110
2) Alcuni problemi di geodesia . . . . .	915
Jamet, V. Développement de $\arctang x$ en série convergente . . . . .	191
Janni, V. Sul teorema di Sturm . . . . .	50
Janse, L. Bz. 1) Stromverdeelingsysteem van Gebr. Sulzer . . . . .	731
2) Oplossing eener prijsfraag . . . . .	919
Järisch, P. Die beiden Theorien der Elasticität . . . . .	26
Jarleton, F. A. Some deductions of McCullagh's „Lectures on ro- tation“ . . . . .	769
Jarolimek, V. Projection der Durchdringungscurve zweier Rota- tionsflächen zweiter Ordnung auf die Ebene der beiden Drehungs- achsen . . . . .	494
Jeffery, H. M. 1) Theorems relating to the regular polyhedra . . . . .	474
2) On theorems relating to the regular polyhedra . . . . .	474
3) On certain quartic curves . . . . .	630
4) Tangential property of regular hypocycloids and epicycloids . . . . .	637
5) On the rectifiable spherical epicycloid . . . . .	637
6) On spherical curves of the fourth class . . . . .	703
7) On spherical cycloidal and trochoidal curves . . . . .	703
Jenkins, J. S. Solution of a question . . . . .	619
Jensen, P. V. Analytisk Fremstilling af Kurves beskrevne ved en bevægelig Frestangsferbindelse . . . . .	633
Jeřábek, V. Construction von conjugirten und senkrechten Strahlen von projectivischen Büscheln . . . . .	507
Igel, B. Eine Klasse von Abel'schen Gleichungen . . . . .	50
Igurbide, A. F. Investigaciones filosofico-matematicas sobre las contidades imaginarias . . . . .	30
Imschenetzky, V. G. Erweiterung einer Euler'schen Methode . . . . .	253
Jockmick, W. Sifferexempel till plana koordinatgeometrien . . . . .	597

	Seite
Kitchin, J. L. Solutions of questions . . . . .	87. 166. 539
Kittudge, L. A. Solutions of questions . . . . .	461. 470
Klein, F. 1) Ueber eindeutige Functionen . . . . .	345
2) Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale . . . . .	358
Klemenčič, J. Capacität eines Plattencondensators . . . . .	866
Klug, L. Entwicklung des Euler'schen Algorithmus . . . . .	100
Kniesley, U. J. Solution of a question . . . . .	229
Knowles, R. Solutions of questions . 191. 463. 471. 539. 619. 621.	635
König, A. Beziehungen zwischen der galvanischen Polarisation und der Oberflächenspannung des Quecksilbers . . . . .	866
König, W. Elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes	838
Königsberger, L. 1) Aus der Theorie der Differentialgleichungen	234
2) Irreducibilität von Differentialgleichungen . . . . .	240
3) Eigenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen . . . . .	241
4) Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen . . . . .	289
Kohlrausch, F. 1) Messung der Windungsfläche einer Drahtspule auf galvanischem Wege . . . . .	874
2) Absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung . . . . .	881
Korkin, A. N. Unmöglichkeit einer gewissen Gleichung durch ganze Functionen zu genügen . . . . .	134
Köstler, H. Vorschule der Geometrie . . . . .	448
Kostka, C. Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen . . . . .	112
Kotanyi, L. Construction algebraischer Ausdrücke mit Hülfe von Involutionen auf Kegelschnitten . . . . .	536
Kramer, P. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes . . .	26
Krantz, H. J. Solution d'une question . . . . .	190
Krause, M. 1) Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung . . . . .	414
2) Multiplicatorgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung . . . . .	414
3) Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen für die Transformation fünften Grades . . . . .	415
Krazer, A. Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel . . . . .	415
Krebs, C. Hvorvidt ere Axiomerne Erfaringssætninger . . . . .	35
Krey, H. Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten .	572
Kronecker, L. 1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen . . . . .	38
2) Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in ihre irreductibeln Factoren . . . . .	44
3) Zur Theorie der Formen höherer Stufen . . . . .	44
4) Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen . . . .	45
5) Die Composition Abel'scher Gleichungen . . . . .	46
6) Die cubischen Abel'schen Gleichungen . . . . .	46
7) Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen . . . . .	48. 115
8) Die Subdeterminante symmetrischer Systeme . . . . .	111
Küttner, W. Activitätswahrscheinlichkeit . . . . .	172
Kuntze, O. Analytische Untersuchungen aus der Hydrostatik . . .	745
Laboulaye. Discours . . . . .	19
Ladd, Ch. Solutions of questions . 87. 156. 179. 229. 463. 473. 539.	595 618. 635. 669. 685. 688

	Seite
Leonhardt, G. 1) Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen . . . . .	430
2) Grundzüge einer Dipolargeometrie . . . . .	588
Lerch, M. Ueber den Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ . . . . .	368
Letnikoff, A. V. Untersuchungen über trigonometrische Functionen . . . . .	206
Leudesdorf. Solution of a question . . . . .	493
Lévy, M. 1) Une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité . . . . .	748
2) Mouvement de deux particules électrisées . . . . .	861
3) Solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances . . . . .	880
4) Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine électrodynamique et sa vitesse de rotation . . . . .	880
5) Sur une communication de M. Deprez . . . . .	880
Lez, H. Solution of a question . . . . .	59
Lie, S. 1) Gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten . . . . .	234
2) Untersuchungen über Differentialgleichungen . . . . .	287. 288
3) Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten . . . . .	641
4) Bestimmung aller Flächen, die durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden . . . . .	642
5) Bestimmung von Raumcurven . . . . .	668
Lieber, H. Geometrische Constructionsaufgaben . . . . .	457
Liebisch, Th. Geometrische Krystallographie . . . . .	476
Ligowski, W. Zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades . . . . .	56
Liguine, V. 1) Liste des travaux sur les ovales de Descartes . . . . .	25
2) Les systèmes articulés de MM. Peaucellier, Hart et Kempe . . . . .	730
Lilienthal, R. v. Schaaren sphärischer Curven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind . . . . .	399
Lindemann, F. 1) Das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen . . . . .	189
2) Ueber die Ludolph'sche Zahl . . . . .	369
3) Sur le rapport de la circonférence au diamètre . . . . .	369
4) Ueber die Zahl $\pi$ . . . . .	369
5) Sur les courbes d'un système linéaire trois fois infini . . . . .	601
Lindstedt, A. Fresnel'sche Integrale . . . . .	836
Lindstedt. 1) Eine für die Störungstheorie wichtige Differentialgleichung . . . . .	926
2) Bemerkungen zur Integration einer gewissen Differentialgleichung . . . . .	927
Lindhagen, A. Nic. Copernici de hypothesibus motuum coelestium . . . . .	11
Lionnet. Solution d'une question . . . . .	138
Lippich, F. Polaristrobometrische Methoden . . . . .	849
Lippmann, G. 1) Sur la théorie des couches doubles de M. Helmholtz . . . . .	867
2) Expressions générales de la température absolue . . . . .	890
Lipschitz, R. 1) Sur une communication de M. de Jonquières . . . . .	119
2) Sur une intégrale . . . . .	228
3) Bestimmung von Oberflächen . . . . .	650
4) Sur le pendule . . . . .	759
Lisleferme, H. de. Note d'analyse géométrique . . . . .	232
Livenzoff, A. Ueber Maxima und Minima der einfachen bestimmten Integrale . . . . .	306
Löven, J. M. Om plana algebraiska kurvors rektifiabilitet . . . . .	579

	Seite
Masoni, U. Sopra alcune curve del quarto ordine . . . . .	701
Mathieu, E. 1) Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ de Gauss . . . . .	276
2) Sur les coordonnées curvilignes . . . . .	586
Matlister, D. 1) Solution of a question . . . . .	156
2) On probability and listerism . . . . .	176
Matthiessen, L. Antike Auflösung des sogenannten Restproblems	122
Matz. Solutions of questions 59. 156. 161. 179. 207. 222. 465. 618. 621. 625.	688
Matzka, W. Kritische Berechnungen der musikalischen Töne . . .	827
Maximowitsch, W. Interpolation der impliciten Functionen . . .	161
Maxwell, A. Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus . .	856
Mayenberg, J. Aufgaben der sphärischen Astronomie . . . . .	918
Mayer, H. Ueber die von Guébhard vorgeschlagene Methode der Darstellung äquipotentialer Linien . . . . .	869
McCay, W. S. Solution of a question . . . . .	467
McColl, H. Solution of a question . . . . .	179
McFarlane. On probability and listerism . . . . .	176
McIntosh, A. Solutions of questions . . . . .	625
McKenzie, D. J. Mc.G. Transformation of annuities . . . . .	168
McKenzie, J. L. Solutions of questions . . . . .	87. 625
McMurphy, A. 1) Solutions of questions . . . . .	87. 196. 688
2) Solutions of questions . . . . .	473. 539
Meech, L. W. 1) System and tables of life insurance . . . . .	169
2) Complementary division . . . . .	938
Meisel, F. Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel . . . . .	855
Menger, J. 1) Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . . .	480
2) Geometrische Formenlehre . . . . .	480
Mensbrugghe, G. v. d. 1) Rapport sur un mémoire de M. Lagrange	749
2) Interprétation de l'effet d'une couche mince d'huile . . . . .	826
Méray, Ch. Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré . . . . .	130
Meyer, A. I hvad mon äro axiomerna erfarenhetssatzer . . . . .	35
Meyer, M. S. Solutions of questions . . . . .	207. 539. 689
Meyer, W. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen	934
M. K. Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades . . . . .	55
Miasojedoff, A. N. Satz über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung . . . . .	53
Michaelis, N. Th. Brugbalken van de tweede ordre . . . . .	741
Michaelis, G. J. 1) Bewegingen van vloeistoffen . . . . .	788
2) Theorie der elastischen Nachwirkung . . . . .	801
Michelson, A. Sur le mouvement relatif de la terre et de l'éther	850
Figotti, A. Zur Theorie der Kreistheilung . . . . .	127
Mildner, R. Ableitung neuer unendlicher Reihen . . . . .	182
Milnowski, A. Elementar-synthetische Geometrie der Kegel- schnitte . . . . .	522
Miller, W. J. C. Solutions of questions . . . . .	59. 179. 461. 625. 635
Minchin. Sätze über Rollcurven . . . . .	637
Minich, S. R. Sulle equazioni di quinto grado . . . . .	57
Minin, A. P. Eigenschaften der Zahlen, die den vollkommenen analog sind . . . . .	120
Mitchell, O. H. 1) On determinants of powers . . . . .	105
2) On partitions . . . . .	117
Mittag-Leffler, G. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable . . . . .	325





	Seite
Oberbeck, A. 1) Ueber die Bewegungen der Luft an der Erdoberfläche . . . . .	791
2) Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen . . .	871
3) Ueber elektrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen . . . . .	871
Ocagne, M. d'. 1) Sommaton d'une série . . . . .	194
2) Développement des logarithmes et des exponentielles . . . . .	195
3) Mode de détermination des courbes planes . . . . .	730
4) Remarques sur le pendule . . . . .	753
O'Neil de Medeiros, J. C. Sobre um problema de algebra elementar . . . . .	190
Openshaw, T. W. Solution of a question . . . . .	621
Opitz, P. Sätze über Anziehung . . . . .	798
Oppermann, L. Om vor Kundskab om Primtallenes Mongde . . .	118
Oppolzer, Th. v. 1) Ueber eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis . . . . .	1
2) Ermittlung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen . . . . .	753
3) Lehrbuch der Bahnbestimmung der Cometen und Planeten. I. .	919
4) Syzygientafeln für den Mond nebst ausführlicher Anweisung für den Gebrauch derselben . . . . .	930
5) Lösung des Kometenproblems . . . . .	930
6) Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen beim Cometenproblem . . . . .	931
Orchard, H. L. Solutions of questions . . . . .	138. 471
O'Regan, J. Solutions of questions 59. 87. 146. 156. 463. 469. 470.	621
Orlow, G. Sur une intégrale double . . . . .	215
Padeletti, D. 1) Alcuni corollari di un teorema del prof. Fergola .	401
2) Principii della teoria dei quaternioni . . . . .	594
3) Su un calcolo nella teoria delle dinami analogo a quello dei quaternioni . . . . .	595
Paige, C. Le. 1) Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables . . . . .	77
2) Sur les formes quadratiques à deux séries de variables . . . .	77
3) Sur la forme quadrilinéaire . . . . .	77
4) Die $2k$ -elementige centrale Gruppe einer Involution $k^{\text{ter}}$ Stufe und $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades . . . . .	87
5) Sur l'involution biquadratique du troisième rang . . . . .	540
6) Die $2k$ -elementige neutrale Gruppe einer Involution . . . . .	602
7) Représentation géométrique de deux transformations uniformes .	602
8) Transformations géométriques uniformes . . . . .	603
9) Mémoire sur les courbes du 3 <sup>me</sup> ordre . . . . .	604
10) Essai de géométrie du 3 <sup>me</sup> ordre . . . . .	605
11) Les courbes du 3 <sup>me</sup> ordre . . . . .	605
Pánek, A. 1) Zur Auflösung einer Gleichung . . . . .	55
2) Geometrische Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung . .	179
Paraira, M. C. 1) Over de figuur, welke ontstaat, wanneer men op de sejden van een driehoek parallelogrammen beschrijft . . .	475
2) Een stereometrisch analogon van het theorema van Pappus . .	475
Pasch, M. 1) Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*,	197
2) Vorlesungen über neuere Geometrie . . . . .	498
3) Ueber projective Punktreihen . . . . .	507
4) Zur Kegelschnittstheorie . . . . .	615

\*) Siehe unter Berichtigungen.

Picquet, H. Traité de géométrie analytique . . . . .	582
Pincherle, S. Teoremi sopra gli sviluppi in serie per funzioni analitiche . . . . .	328
Pirmez, D. De l'unité des forces de gravitation et d'inertie . . . . .	32
Pitsch, J. Halbreguläre Sternpolyeder . . . . .	448
Plarr, G. Establishment of the elementary principles of quaternions . . . . .	319
Plehl, J. Zur Cardioide . . . . .	626
Pocrovsky. Beziehungen zwischen den Moduln und ihren Comple-mentären . . . . .	398
Poincaré, H. 1) Extension de la notion arithmétique . . . . .	139
2) Séries trigonométriques . . . . .	185
3) Sur les fonctions fuchsiennes . . . . .	255
4) Une classe d'invariants relatifs aux équations linéaires . . . . .	282
4) Les points singuliers des équations différentielles . . . . .	284
5) L'intégration des équations différentielles par les séries . . . . .	285
6) Sur les transcendentes entières . . . . .	323
7) Théorie des groupes fuchsien . . . . .	338
8) Sur les groupes kleinéens . . . . .	344
9) Sur les fonctions fuchsiennes . . . . .	344
10) Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substi-tutions linéaires . . . . .	344
11) Sur les groupes discontinus . . . . .	350
12) Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle . . . . .	666
Polignac, O. de. Solution of a question . . . . .	613
Posse, K. A. Ueber die $\vartheta$ -Functionen von zwei Veränderlichen . . . . .	416
Prym, F. Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie . . . . .	419
Pachta, A. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten . . . . .	105
Quet. Sur les forces d'induction que le soleil développe dans les corps par sa rotation . . . . .	886
Radau, R. 1) Remarques concernant le problème de Kepler . . . . .	921
2) Sur un point de la théorie des perturbations . . . . .	924
Ramisch, A. Ueber sich in einem Punkte schneidende coordinirte Linien . . . . .	521
Rasche, A. Untersuchung gewisser Flächen zweiten Grades . . . . .	552
Rausenberger, O. 1) Eindeutige Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden . . . . .	345
2) Zur Theorie der Functionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden . . . . .	362
3) Periodische Functionen zweiter Gattung . . . . .	363
4) Zur Theorie der elliptischen Functionen . . . . .	378
5) Zur Theorie der Modulfunctionen . . . . .	397
Rawson, R. 1) Solutions of questions . . . . . 191. 271. 411.	412
2) On a transformation of Riccati's equation . . . . .	972
Rayleigh, L. On the infinitesimal banding of surface of revolution . . . . .	810
Razzaboni. Relazioni sopra una memoria del D. Besso . . . . .	270
Réalis, S. 1) Solutions de questions . . . . . 59.	138
2) Quelques intégrales indéfinies . . . . . 463. 585.	211
Reeves, G. M. Solutions of questions . . . . .	635
Reggio, Z. Alcune ricerche sulle coniche . . . . .	534
Řehořovský, W. 1) Borchardt's erzeugende Function . . . . .	105
2) Tafeln der symmetrischen Functionen . . . . .	114
Reidt, G. Trigonometrische Analysis planimetrischer Constructions-aufgaben . . . . .	468



	Seite
Rozé, C. Des termes à courte période dans le mouvement de rotation de la Terre . . . . .	932
Rudel, K. Vom Körper höherer Dimension . . . . .	437
Rüefli, J. Lehrbuch der ebenen Geometrie . . . . .	454
Runge, C. Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme . . . . .	112
Rupp, O. Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln . . . . .	553
Rusch, Zur Trisection . . . . .	632
Russell, W. H. L. 1) On certain definite integrals . . . . .	220
2) Certain geometrical theorems . . . . .	603
Russell, J. W. Solution of a question . . . . .	471
Rutter, E. Solutions of questions 59. 87. 138. 463. 467. 476. 619. 621. . . . .	635
Rychlicki, St. Beitrag zum Rationalmachen einer Summe von 2 <sup>ten</sup> Wurzeln . . . . .	366
Sachse, A. 1) Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten . . . . .	191
2) Eigenschaft des vollständigen Vierecks . . . . .	463
3) Beweis zweier Sätze von Schlömilch . . . . .	508
Saint-Germain, A. de. 1) Sur les équations de l'équilibre astatique . . . . .	741
2) Extrait d'une lettre . . . . .	798
Saint-Venant, de. 1) Des mouvements que prennent les diverses parties d'une liquide dans l'intérieur d'un verre ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice . . . . .	779
2) Du choc longitudinal d'une barre élastique libre . . . . .	817
3) Solution du problème du choc longitudinal . . . . .	817
Saltel, L. Moyen d'étendre la théorie des imaginaires sans faire usage des imaginaires . . . . .	317
Salvert, De. Mémoire sur les ombilics coniques . . . . .	645
Sanat. Permutationen der Zahlen des dekadischen Systems . . . . .	149
Sarkar, N. Solution of a question . . . . .	621
Sauvage, L. Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes . . . . .	243
Scott, R. F. 1) On some determinants where elements are rational fractions . . . . .	106
2) On determinants . . . . .	109
3) Some forms of cubic determinants . . . . .	110
Scott, Ch. A. Solutions of questions . . . . .	469. 539
Schäwen, P. v. 1) Analogien zwischen dem sphärischen und ebenen Dreieck . . . . .	471
2) Die seitenhalbirenden Transversalen des sphärischen Dreiecks . . . . .	472
Scheffler, H. Die magischen Figuren . . . . .	134
Scheibner. Ueber einige Arbeiten C. J. Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie . . . . .	924
Schell, A. Der Einschneidetransporteur von V. von Reitzner . . . . .	915
Schelle, K. Lehrgang der populären Astronomie . . . . .	917
Scheller, F. E. Theorie der geographischen Netze . . . . .	496
Schier, O. Potenzsummen rationaler Zahlen . . . . .	121. 190
Schiffner, F. Die Schraubenregelfläche . . . . .	730
Schlegel, V. 1) Théorèmes de géométrie à $n$ dimensions . . . . .	434
2) Geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre . . . . .	443
3) Sur un théorème de M. Laisant . . . . .	736



	Seite
Sebert et Hugoniot 3) Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques . . . . .	815
Seidelin, C. Om Konstruktion af Tangenter til Røringskurven . .	640
Seitz. Solutions of questions . . . . . 156. 161.	179
Selby, A. L. Solutions of questions . . . . . 476.	621
Selivanoff. Sur les intégrales définies uniformément convergentes	215
Sepp, B. Zu Posidonius Rhodius . . . . .	7
Serdobinsky, V. E. Zur Determinantentheorie . . . . .	109
Sexe, S. A. Skul de des ikke lade sig finde et reelt matematisk Udtryk . . . . .	30
Seydler, A. 1) Zur Theorie der complanaren Biquaternionen. . .	596
2) Einleitung in die theoretische Physik . . . . .	724
Sharp, W. J. C. 1) Solutions of questions 59. 87. 138. 151. 196. 476. 539. 595. 613. 618. 621. 625. 638.	689
2) On the invariants of certain orthogonal transformations . . .	802
Siacci, F. Gli assi statici di un sistema di forma invariabile . .	740
Siebel, A. Ueber algebraische Gleichungen . . . . .	55
Silva, D. L. P. da. 1) Derivadas de ordem qualquer de $y$ em ordem a $x$ quando è $f(x, y) = 0$ . . . . .	203
2) Sobre alguns integraes indefinidos . . . . .	211
Šimerka, W. Die Kraft der Ueberzeugung . . . . .	28
Simony, O. 1) Neue mathematische Erfahrungssätze . . . . .	30
2) Ueber Gebilde, welche aus krenzförmigen Flächen etc. entstehen . . . . .	444
3) Ueber eine Reihe neuer Tatsachen aus dem Gebiet der Topologie . . . . .	444
4) Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze . . . . .	444
5) Lösung einer Aufgabe . . . . .	446
Sinram, Th. 1) Zur Gleichung dritten Grades . . . . .	56
2) Zur Lösung von Gleichungen höheren Grades . . . . .	57
Smolik, F. Elemente der darstellenden Geometrie . . . . .	480
Sohncke, L. Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie . .	801
Spitzer, S. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen . . . . .	280
Spottiswoode, W. 1) Note on: Certain definite integrals of Mr. Russell . . . . .	220
2) Note on Mr. Russell's paper . . . . .	604
3) On the polar planes of four quadrics . . . . .	699
Sprung. Zur Theorie atmosphärischer Wirbel . . . . .	793
Stahl, W. Zur synthetischen Construction der Complexe zweiten Grades . . . . .	563
2) Das Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Classe . . .	562
Stammer. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen aus zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln erscheinen . . . . .	631
Stankewitsch, B. Zur Theorie der Congruenzen . . . . .	124
Staudé, O. 1) Fadenconstruction des Ellipsoides . . . . .	686
2) Geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid . . . . .	686
Steen, A. 1) Om Anvandelser af delvis Integration . . . . .	212
2) Om et bestemt Integral som diskontinuert Function . . . . .	221
3) Integration af en lineär Differentialligning . . . . .	375
Stefan, J. 1) Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken . . . . .	897
2) Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens . . . . .	882
3) Die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes . . .	883





	Seite
Sylvester, J. J. 8) Geometrical treatment of a theorem in numbers . . . . .	117
9) Solutions of questions . . . . .	138
10) On a logical problem connected with assurances on joint lives . . . . .	169
11) On mechanical involution . . . . .	834
12) A certain integrable class of differential and finite difference equations . . . . .	285
13) Theory of simultaneous linear differential equations . . . . .	285
Symons, E. W. Solutions of questions 87. 146. 471. 473. 476. 618. 619. 635.	638
Tanner, W. L. 1) Solutions of questions . . . . . 178. 196.	669
2) The coordinates of a plane curve in space . . . . .	585
Tannery, P. 1) Sur le système astronomique d'Endoxe . . . . .	2
2) Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules . . . . .	3
3) Aristarque de Samos . . . . .	4
4) Critique ancienne d'une démonstration d'Archimède . . . . .	6
5) Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus . . . . .	7
Tannery, J. 1) Sur les intégrales eulériennes . . . . .	225
2) Rectification . . . . .	225
Tarry, G. 1) Propriétés générales de trois figures semblables . . . . .	458
2) Relation entre sept points quelconques d'une section conique . . . . .	530
Taylor, C. Solution of a question . . . . .	621
Taylor, H. M. 1) On a geometrical theorem . . . . .	150
2) On a six-point circle connected with a triangle . . . . .	461
Taylor, W. W. Solution of a question . . . . .	138
Tchébycheff. Ueber die Functionen, die für gewisse Werte der Variabeln wenig von Null abweichen . . . . .	364
Tebay, S. Solutions of questions . . . . . 156. 161.	621
Teixeira, F. G. L'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre . . . . .	298
Terry, T. R. Solutions of questions . 87. 161. 179. 193. 196. 222. 463. 466. 471. 473.	619
Tesař, J. Kinematische Bestimmung der Contour einer veränderlichen Schraubenfläche . . . . .	495
Tessari, D. Applicazioni della geometria descrittiva . . . . .	483
Tetmajer, L. Culman's bleibende Leistung . . . . .	20
Thiele, T. N. Ueber Prof. Gylden's intermediäre Bahnen . . . . .	928
Thieme, H. 1) Zur Geometrie des Tetraeders . . . . .	549
2) Zur Construction des Polarsystems einer Fläche 3 <sup>ter</sup> Ordnung . . . . .	558
Thirion, J. Comptes rendus . . . . .	917
Thomae, J. 1) Elementare Behandlung der hypergeometrischen Reihe . . . . .	193
2) Ueber specielle elliptische Functionen . . . . .	380
3) Elliptische Integrale zweiter Gattung . . . . .	381
4) Integrale zweiter Gattung . . . . .	418
Thomson, J. J. 1) Note on an integral . . . . .	223
2) On the vibrations of a vortex ring . . . . .	776
Tilser, F. Anfangsgründe der darstellenden Geometrie . . . . .	479
Tisserand, F. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes . . . . .	925
Tognoli, O. Sulla teoria delle involuzioni . . . . .	574
Tonelli. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di $n$ dimensioni	797
Torelli, G. Sui determinanti circolanti . . . . .	108



	Seite
Walker, G. F. 1) Solutions of questions . 138. 179. 462, 539. 618. 619. 621. 625.	685
2) Two constructions for drawing spheres to touch four given spheres . . . . .	473
3) Solutions of questions . . . . . 87. 207. 307. 473. 595.	606
4) On a certain inequality and a limit . . . . .	192
5) Proof of the addition theorem for elliptic integrals of the second kind . . . . .	392
6) On the covariant locus of the vertex of a pencil of tangents on a cubic involution . . . . .	606
Wallentin, F. Lehrbuch der Arithmetik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen . . . . .	938
Walter, A. Ueber die molecular-kinetischen Gesetze der Ver- dampfungswärme . . . . .	892
Walton, W. 1) Method of finding maxima and minima of functions . . . . .	205
2) Determination of the maxima and minima of a function . . . . .	205
Warburg, E. und L. von Babo. Zusammenhang zwischen Vis- cosität und Dichtigkeit bei flüssigen Körpern . . . . .	905
Wassmuth, A. 1) Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung . . . . .	884
2) Ueber den inneren Zusammenhang einer Anzahl von elektro- magnetischen Erscheinungen . . . . .	884
3) Ueber elektromagnetische Tragkraft . . . . .	885
4) Ueber die specifische Wärme des stark magnetischen Eisens . . . . .	897
5) Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung . . . . .	899
Webb, R. R. 1) Stress and strain . . . . .	805
2) On the equilibrium of a bent plate . . . . .	809
Weber, H. 1) Beweis eines Satzes . . . . .	141
2) Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen . . . . .	352
Weber, H. Der Rotationsinductor . . . . .	874
Websky. Methode einen Normalenbogen zu berechnen . . . . .	478
Weierstrass, K. 1) Recherches sur les fonctions $2r$ -fois péri- odiques de $r$ variables . . . . .	325
2) Zur Theorie der elliptischen Functionen . . . . .	387
3) Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen . . . . .	415
Weilenmann, A. Der geometrische Unterricht in Mittelschulen . . . . .	36
Weiler, A. Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen . . . . .	713
Weiler. 1) Bemerkung zu einem Aufsatz in No. 2383 . . . . .	928
2) Nachträge zu der Abhandlung über das Problem der drei Körper. . . . .	928
Weill. 1) Sur un certain triangle . . . . .	470
2) De l'involution de plusieurs points sur une conique . . . . .	537
3) Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale . . . . .	603
4) De l'involution de plusieurs points sur une conique . . . . .	615
5) Sur certains polygones . . . . .	675
Weingarten, J. Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krum- men Flächen . . . . .	661
Weiss, M. Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade . . . . .	50
Wenck, J. Die synthetische Geometrie der Ebene . . . . .	499
Wenzel, E. Zurückführung der schiefen Ebene auf den Hebel . . . . .	733
West, E. Exposé des méthodes en mathématiques . . . . .	233



	Seite
Zenger, K. V. 7) Solution du problème de Kepler pour des ex- centricités considérables . . . . .	922
Zeuthen, H. G. 1) Fra Matematikens Historie . . . . .	4
2) Bevis for en Konstruktion af Chasles . . . . .	532
3) The mekanisk Konstruktion of Descartes' Ovals . . . . .	627
4) Om stationære kurver i et System . . . . .	597
5) Elementär Behandlung af et Par Sætninger om et Punkts Be- vægelse . . . . .	750
6) Om mekanisk Konstruktion af Descartes' Ovaler . . . . .	627
Zimmermann, O. Aufgaben über Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt . . . . .	539
Zuckermann, B. Jüdische Zeitrechnung . . . . .	27

## Berichtigungen.

---

### Band XIV.

Seite	14	Zeile	3	von unten füge hinzu: „Mathesis II, 243-245“.
„	32	„	9	„ oben lies „Lesage“ statt „Lagrange“.
„	87	„	7	„ „ „ „Marks“ statt „Marcks“ und „Buck“ statt „Busk“.
„	99	„	8	„ unten „ „Anhang“ statt „Anfang“.
„ 197. Gegen unser sonstiges Princip ist es leider vorgekommen, dass in dem Referat über das Lehrbuch des Herrn Pasch die Grenzen einer rein sachlichen Besprechung überschritten worden sind. Wir heben bei dieser Gelegenheit noch einmal hervor, dass die Verantwortung hierfür ganz allein dem Herrn Referenten anheimfällt.				
Seite	309	Zeile	8	von oben lies „Laupp“ statt „Laapp“.
„	365	„	15	„ „ „ „de periodicke“ statt „der periodiche“
„	365	„	20	„ „ „ „ $n = 2$ “ statt „ $n = z$ “.
„	367	„	1	„ „ „ „2“ statt „1“.
„	368	„	1	„ unten „ „Referat im folgenden Bande“.
„	379	„	1	„ oben „ „de“ statt „der“.
„	398	„	7	„ unten „ „ $\sin 8n$ “ statt „ $\sin 8n$ “.
„	414	„	5	„ „ „ „Multiplicatorgleichungen“ statt „Multiplicationsgleichungen“.
„	416	„	12	„ oben „ „Elliot“ statt „Elliott“.
„	430	„	10, 7, 5 und 3	von unten lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„	431	„	6 und 14	von oben lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„	431	„	1	von unten lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„	520	„	16	„ „ „ „transformaties“ statt „transformatics“.
„	547	„	11	„ oben „ „Vietor“ statt „Victor“.
„	802	„	13	„ „ „ „Castigliano“ statt „Castegliano“.
„	848	„	11	„ „ „ „licht“ statt „lieht“.

---













